ALGEBRA E ANALITICA

1. Determina il resto della divisione fra il polinomio $P(x) = x^3 - 4$ e il binomio $D(x) = x^2 - 2$.

[$R(x) = 2x - 4$]

SOLUZIONE

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0x^2 + 0x - 4 & x^2 - 2 \\ \cline{2-2} -\left(x^3 + 0x^2 - 2x\right) & x \\ \hline 2x - 4 & \end{array}$$

Detto D(x) il polinomio divisore, Q(x) il polinomio quoziente, R(x) il resto, il polinomio P(x) si può scrivere

$$P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$$

$$x^3 - 4 = (x^2 - 2)x + (2x - 4)$$

2. Determina il resto della divisione fra il polinomio $P(x) = x^4 - 4$ e il binomio $x - 2$.

SOLUZIONE Uso il teorema del resto e quindi calcolo P(2)=16-4=12 [12]

3. Per quale valore del parametro *m* il polinomio $P(x) = x^4 + 2mx - 4$ è divisibile per il binomio $D(x) = x - 2$.

[$m = -3$]

SOLUZIONE uso Ruffini

	1	0	0	2m	-4
2		2	4	8	16+4m
	1	2	4	8+2m	12+4m

Il resto della divisione deve risultare zero, dunque pongo $12 + 4m = 0$ cioe' $m = -3$.

4. Per quale valore del parametro m la funzione $f(x) = x^4 + 2mx - 4$ ha come fattore $x - 2$.

SOLUZIONE è lo stesso quesito di prima formulato con linguaggio diverso. Si tratta di scomporre in fattori f(x), allora si può usare Ruffini come nel quesito precedente [$m = -3$]

5. Per quale valore del parametro k le radici dell'equazione $(k - 2)x^2 - (2k - 1)x + k + 1 = 0$ sono coincidenti

$$\left[k = -\frac{9}{8}\right]$$

SOLUZIONE è una equazione di 2° grado quindi bisogna imporre $\Delta = 0$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad (2k - 1)^2 - 4(k + 1)(k - 2) = 0$$

6. Per quali valori del parametro k le radici dell'equazione $(k-2)x^2-(2k+1)x+k+1=0$ sono distinte e discordi? $[-1 \le k < 2]$

SOLUZIONE

il prodotto delle radici deve essere negativo. Ricordando che in una equazione di 2° grado del tipo $ax^2+bx+c=0$, dette x_1 e x_2 le sue radici, la relazione tra coefficienti e radici è la seguente: $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ e $x_1x_2=\frac{c}{a}$, segue che basta imporre che $\frac{k+1}{k-2}<0$ ed escludere il valore k=2 che annulla il denominatore e rende l'equazione di primo grado.

7. Per quale valore di k le radici dell'equazione $(k-2)x^2-(2k+1)x+k+1=0$ hanno come somma 1?

$[k=-3]$

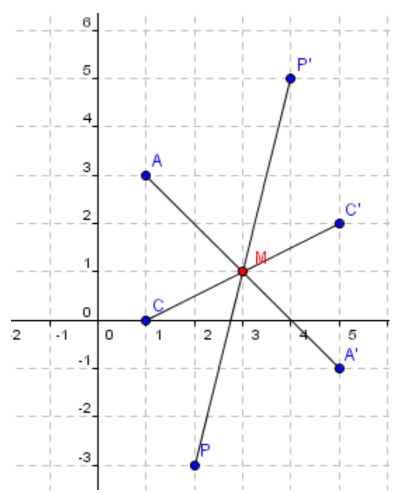
SOLUZIONE

$x_1+x_2=1$ quindi basta porre $-\frac{b}{a}=1$ cioè $\frac{2k+1}{k-2}=1$ con $k \neq 2$.

8. Le equazioni della simmetria centrale di centro M di coordinate (a,b) sono $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$. Dato il punto $P(2,-3)$ e il centro di simmetria M(3,1) determina le coordinate del suo trasformato P'. $[P'(4,5)]$

SOLUZIONE

Due punti del piano si corrispondono in una simmetria centrale se il centro di simmetria è il punto medio del segmento che ha per estremi i punti stessi. (vedi figura)



Le coordinate del punto medio $M(a,b)$ di un segmento di estremi $P(x,y)$ e $P'(x',y')$ sono: $a=\frac{x+x'}{2}$, $b=\frac{y+y'}{2}$.

Ricavo da tali formule le coordinate del punto trasformato x' e y'

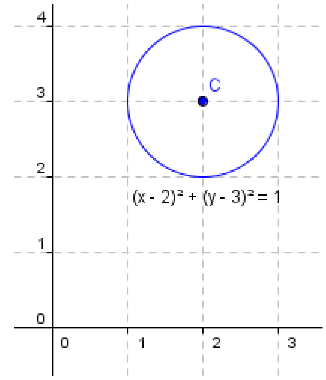
$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}.$$

Sostituendo i valori dati $\begin{cases} x' = 2\cdot 3 - 2 = 4 \\ y' = 2\cdot 1 - (-3) = 5 \end{cases}$ si ottiene $P'(4,5)$.

9. Scrivi le equazioni di una simmetria centrale di centro C(-5,4). $\left[\begin{cases} x' = 2(-5) - x = -10 - x \\ y' = 2(4) - y = 8 - y \end{cases}\right]$

10. Determina l'equazione cartesiana della curva $\begin{cases} x = 2 - cost \\ y = 3 + sent \end{cases}$ $\left[(x-2)^2+(y-3)^2=1\right]$

SOLUZIONE



Per ottenere l'equazione cartesiana della curva dobbiamo avere come variabili solo x e y, quindi bisogna eliminare il parametro t. Il modo più veloce, in questo caso, consiste nell'isolare il seno e il coseno, elevare al quadrato, sommare le equazioni ottenute e utilizzare la 1° relazione fondamentale della trigonometria:

$$\begin{cases} x-2=-cost \\ y-3=sent \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)^2=cos^2t \\ (y-3)^2=sen^2t \end{cases} \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2+(y-3)^2=cos^2t+sen^2t=1$$

è l'equazione di una circonferenza di centro C(2,3) e raggio $r=1$

11. Determina per quale valore del parametro m le rette di equazione $(m-3)x-(m+1)y=m-1$ e $(m+1)x+3y=m+3$ sono perpendicolari tra loro. $[m=6 \wedge m \neq -1]$

SOLUZIONE

Ricordando che il coefficiente angolare della retta r è $m_r=-\dfrac{a}{b}$ e che due rette sono ⊥ tra loro se i loro coefficienti angolari sono l'uno l'antireciproco dell'altro, $m_s=-\dfrac{1}{m_r}$, allora $\dfrac{m-3}{m+1}=\dfrac{3}{m+1} \quad \Rightarrow \quad m=6 \wedge m \neq -1$

12. Date le equazioni parametriche del luogo geometrico $\begin{cases} x=5t+2 \\ y=-10t+4 \end{cases}$ con $-1 \leq t \leq 1$ determina l'equazione cartesiana del luogo. $[y=-2x+8 \quad \text{con} \quad -3 \leq x \leq 7]$

SOLUZIONE Per ottenere l'equazione cartesiana della curva dobbiamo avere come variabili solo x e y, quindi bisogna eliminare il parametro t. In questo caso basta ricavare t dalla prima e sostituire nella seconda

$$\begin{cases} t=\dfrac{x-2}{5} \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ y=-10\left(\dfrac{x-2}{5}\right)+4 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y=-2x+8$$

a questo punto occorre trovare le limitazioni sulla variabile x note quelle sul parametro t: $-1 \leq t \leq 1$

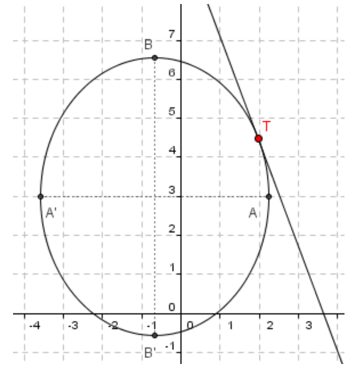
basta sostituire i valori estremi di t nella prima delle equazioni parametriche della curva $x=5t+2$
$x=5\cdot(-1)+2=-3$ e $x=5\cdot 1+2=7$ si ha dunque $-3 \leq x \leq 7$

13. Determina il coefficiente angolare della tangente all'ellisse di equazione $3x^2+2y^2+4x-12y-6=0$ nel suo punto di ascissa $x_0=2$ con $y_0>3$. $[m=-2\sqrt{2}]$

SOLUZIONE

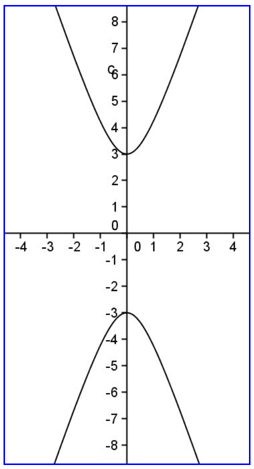
sostituendo $x_0=2$ nell'equazione dell'ellisse si ottiene $y_0^2-6y_0+7=0$ che ha come radici $y_0=3\pm\sqrt{2}$

Il punto di tangenza cercato è $T(2;3+\sqrt{2})$.



Usando il metodo di sdoppiamento $3xx_0+2yy_0+4\dfrac{x+x_0}{2}-12\dfrac{y+y_0}{2}-6=0$ si ottiene l'equazione della tangente in T: $4x+\sqrt{2}y+10-3\sqrt{2}=0$

il cui coefficiente angolare è $m=-\dfrac{a}{b}=-\dfrac{4}{\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}$.



14. L'equazione della conica riportata in figura è:

$a)\ x^2+\dfrac{y^2}{9}=-1 \quad b)\ x^2-\dfrac{y^2}{9}=-1 \quad c)\ x^2+\dfrac{y^2}{9}=1 \quad d)\ x^2-\dfrac{y^2}{9}=1$ [*b*]

SOLUZIONE

È un'iperbole riferita agli assi di simmetria, con asse trasverso lungo 6 e asse y come asse focale.

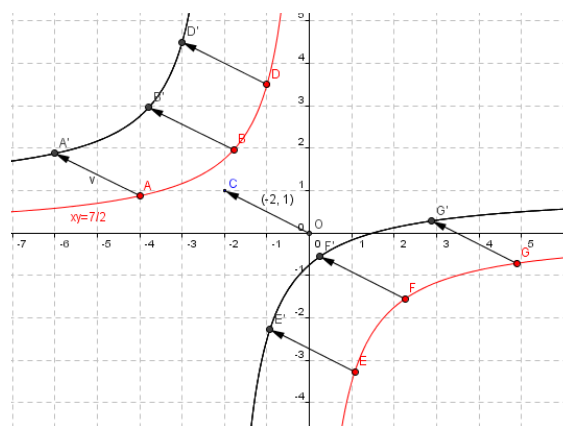
15. Ruotando di 90° l'ellisse di equazione $5x^2+3y^2=15$ quale equazione si ottiene? $[3x^2+5y^2=15]$

16. È data la funzione omografica di equazione $y=\dfrac{2x-3}{2x+4}$. A quale iperbole equilatera non traslata essa corrisponde? $a)\ xy=-\dfrac{7}{2} \quad b)\ xy=-\dfrac{2}{7} \quad c)\ xy=\dfrac{7}{2} \quad d)\ xy=\dfrac{2}{7}$ [*a*]

SOLUZIONE Determino le coordinate del centro di simmetria $C\left(-\dfrac{d}{c},\dfrac{a}{c}\right)$ $C(-2,1)$ che sono anche le componenti del vettore di traslazione $\vec{v}(-2,1)$. Uso il cambio di variabile $x\to x-2 \quad y\to y+1$ corrispondente alla traslazione inversa

$$y=\frac{2x-3}{2x+4} \qquad y+1=\frac{2(x-2)-3}{2(x-2)+4}$$

$$y+1=\frac{2x-7}{2x} \qquad 2xy=2x-7-2x \qquad xy=-\frac{7}{2}$$



ANALISI

17. Date le parabole di equazione $y = ax^2 + 2$ con $a \in \mathbb{R}$, dimostra che i punti in cui la tangente è parallela alla bisettrice del II e IV quadrante sono $P\left(-\frac{1}{2a}, \frac{1+8a}{4a}\right)$

SOLUZIONE
Si tratta di trovare il punto di tangenza noto il coefficiente angolare della tangente. La tangente citata, infatti, deve avere coefficiente angolare -1. Conviene, allora, calcolare la derivata e porla uguale a -1 per trovare l'ascissa del punto di tangenza.
La funzione derivata è $f'(x) = 2ax$
impongo che nel punto di tangenza essa sia uguale al coefficiente angolare della bisettrice del II e IV quadrante:

$$2ax_0 = -1 \qquad x_0 = -\frac{1}{2a}$$

sostituisco nell'equazione della parabola per trovare l'ordinata del punto di tangenza

$$y_0 = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + 2 = \frac{1+8a}{4a}$$

18. Date le parabole di equazione $y = ax^2 + 2$ con $a \in \mathbb{R}$, dimostra che l'equazione parametrica del luogo geometrico dei punti delle parabole che hanno tangente parallela alla bisettrice del II e IV quadrante è:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2a} \\ y = \frac{1+8a}{4a} \end{cases}$$

SOLUZIONE È il quesito precedente espresso con altre parole!

19. L'equazione cartesiana del luogo geometrico del quesito precedente è:

$a)\ y + x^2 + 2 = 0 \quad b)\ y = -x^2 + 2 \quad c)\ 2y + x + 4 = 0 \quad d)\ 2y + x - 4 = 0$ [d]

SOLUZIONE
Le equazioni parametriche del luogo geometrico sono espresse in funzione del parametro a che deve essere eliminato per ottenere l'equazione cartesiana del luogo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2a} \\ y = \frac{1+8a}{4a} \end{cases} \text{ ricavo a dalla prima } \quad a = -\frac{1}{2x} \quad \text{e sostituisco nella seconda } y = \frac{1+8\left(-\frac{1}{2x}\right)}{4\left(-\frac{1}{2x}\right)} = \frac{\frac{x-4}{x}}{-\frac{2}{x}} = \frac{4-x}{2}$$

ottengo quindi $2y = 4 - x$ equazione di una retta.

20. Le due funzioni $f(x) = \ln(x^2 - 4)$ e $g(x) = \ln(x-2) + \ln(x+2)$ sono uguali? Hanno lo stesso grafico? (motiva adeguatamente la risposta senza disegnare il grafico). [no, perché non hanno lo stesso dominio]

21. Se $f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ qual è l'angolo che la retta tangente al grafico di $f(x)$ nel suo punto di ascissa x_0 forma con l'asse x?

$\left[\alpha = \frac{\pi}{6}\right]$

22. La funzione $f(x) = sen2x - 2sen\frac{x}{2}$ ha massimo assoluto nell'intervallo $[0,2\pi]$?

[sì, perché vale il teorema di Weierstrass, infatti …]

23. Siano a e b due costanti reali. Sapendo che $f(x) = a \cdot x \cdot senx + b\ln|x| - x^4$ e che $f(2) = 3$ puoi calcolare $f(-2)$?

SOLUZIONE la funzione data è pari poiché $f(x) = f(-x)$, dunque $f(-2) = f(2) = 3$

24. Il $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{48} sen\frac{6}{x}$ vale:

a) non esiste *b)* 0 *c)* $\frac{1}{8}$ *d)* $+\infty$

(motiva adeguatamente la risposta) $[c]$

SOLUZIONE pongo $t = \frac{6}{x}$, per $x \to \infty$ si ha che $t \to 0$. Qundi $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{48} sen\frac{6}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{8}\frac{sent}{t} = \frac{1}{8}$
avendo usato il limite notevole $\lim_{t\to 0} \frac{sent}{t} = 1$

25. Determina gli asintoti della funzione $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x-4}\right)$

[due asintoti orizzontali ed un asintoto verticale $x = -\frac{2}{3}$, $x = 4$, $y = \ln 3$]

26. Determina gli asintoti della funzione $f(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-4}}$ [due asintoti $y = \sqrt{3}$, $x = 4$]

27. Determina gli asintoti della funzione $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{x-4}$ [tre asintoti $y = \pm\sqrt{3}$, $x = 4$]

SOLUZIONE calcolo $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{x-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{|x|\sqrt{3}}{x} = \pm\sqrt{3}$

28. Determina il valore del parametro che rende la funzione $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & con \quad x \le 1 \\ 4-2ax^2 & con \quad x > 1 \end{cases}$ continua in x=1. La funzione così trovata è anche derivabile in x=1?

[*a*=*2*, è continua ma non è derivabile]

29. La quantità di carica, espressa in coulomb, che attraversa la sezione di un conduttore filiforme metallico ha la seguente legge oraria $q(t) = 3t^2 - 2t + 1$, con t espresso in secondi. Determina l'intensità di corrente che attraversa il conduttore nell'istante t = 3s.

[$i(t) = q'(t) = 6t - 2; \ \ i(3) = 16A$]

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

30. L'area di un triangolo qualunque ABC in cui $a = 6\sqrt{2} \quad \mathrm{b} = 4\sqrt{3} \quad \gamma = 75^\circ$ è

$a)\ 6\sqrt{3} \qquad b)\ \sqrt{6}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right) \qquad c)\ 6\left(\sqrt{3}+3\right) \qquad d)\ 12\left(\sqrt{3}+3\right)$ [c]

SOLUZIONE $A = \frac{1}{2} ab sen\gamma \qquad sen75^\circ = sen(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

31. Quale delle seguenti funzioni è uguale a $f(x) = \sqrt{3}senx + cosx$

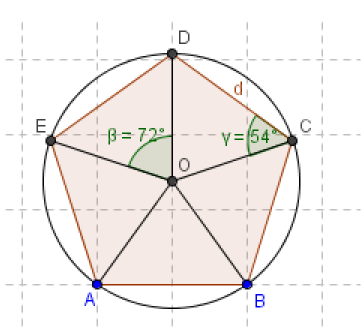
$a)\ 2sen\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \qquad b)\ 2sen\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \qquad c)\ 2cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \qquad d)\ 2cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ [b]

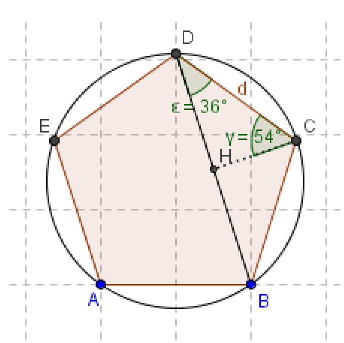
SOLUZIONE si usa il metodo dell'angolo aggiunto con $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$ e $\alpha = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

32. Dimostra che $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

33. La lunghezza della diagonale di un pentagono regolare il cui lato misura d è

$a)\ d \cdot sen\frac{2}{5}\pi \qquad b)\ d \cdot cos\frac{2}{5}\pi \qquad c)\ 2d \cdot sen\frac{\pi}{5} \qquad d)\ 2d \cdot cos\frac{\pi}{5}$ [d]





angolo al centro $D\hat{O}E = 72^\circ = \frac{2\pi}{5}$

nel triangolo HDC: $H\hat{D}C = 36^\circ = \frac{\pi}{5}$ $\overline{DB} = 2\overline{DH} = 2 \cdot d \cdot cos\frac{\pi}{5}$

34. Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo di lato s=10cm. Considera il piano α passante per D, B, C, come risulta diviso il cubo da questo piano? Quanto valgono i volumi del cubo e delle parti in cui esso è suddiviso dal piano α ?

SOLUZIONE

Il piano divide la base del cubo in due parti uguali. La piramide ha la stessa altezza del cubo, qundi il volume è

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}l^2 \cdot l = \frac{1}{6}l^3 = \frac{1000}{6}cm^3$$

35. Calcola la distanza tra il piano α e il vertice A del cubo dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE

Bisogna determinare l'altezza della piramide. Dal volume si può calcolare l'altezza h invertendo la formula:

$$V = \frac{1}{3}S_{DBC}h \qquad h = \frac{3V}{S_{DBC}}$$

Il triangolo DBC è equilatero, il lato DB è la diagonale di una faccia del cubo, dunque

$$DB = s\sqrt{2} = 10\sqrt{2}cm \, .$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2}s\sqrt{2} \cdot s\sqrt{2}sen60^\circ = s^2\frac{\sqrt{3}}{2} = 100\frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}cm^2$$

$$h = \frac{3V}{S_{DBC}} = \frac{3 \cdot \frac{1000}{6}cm^3}{50\sqrt{3}cm^2} = \frac{500}{50\sqrt{3}}cm = \frac{10\sqrt{3}}{3}cm$$

36. Dimostra la formula $tg\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$