

ALGEBRA E ANALITICA

1. Determina il resto della divisione fra il polinomio  $P(x) = x^3 - 4$  e il binomio  $D(x) = x^2 - 2$ .

$$[R(x) = 2x - 4]$$

SOLUZIONE

$x^3 + 0x^2 + 0x - 4$	$x^2 - 2$	Detto $D(x)$ il polinomio divisore, $Q(x)$ il polinomio quoziente, $R(x)$ il resto, il polinomio $P(x)$ si può scrivere  $P(x) = D(x)Q(x) + R(x)$ $x^3 - 4 = (x^2 - 2)x + (2x - 4)$
$- (x^3 + 0x^2 - 2x)$	$x$	
$2x - 4$		

2. Determina il resto della divisione fra il polinomio  $P(x) = x^4 - 4$  e il binomio  $x - 2$ .

SOLUZIONE    Uso il teorema del resto e quindi calcolo  $P(2) = 16 - 4 = 12$  [12]

3. Per quale valore del parametro  $m$  il polinomio  $P(x) = x^4 + 2mx - 4$  è divisibile per il binomio  $D(x) = x - 2$ .

$$[m = -3]$$

SOLUZIONE    uso Ruffini

	1	0	0	2m	-4
2		2	4	8	16+4m
	1	2	4	8+2m	12+4m

Il resto della divisione deve risultare zero, dunque pongo  $12 + 4m = 0$  cioè  $m = -3$ .

4. Per quale valore del parametro  $m$  la funzione  $f(x) = x^4 + 2mx - 4$  ha come fattore  $x - 2$ .

SOLUZIONE    è lo stesso quesito di prima formulato con linguaggio diverso. Si tratta di scomporre in fattori  $f(x)$ , allora si può usare Ruffini come nel quesito precedente [  $m = -3$  ]

5. Per quale valore del parametro  $k$  le radici dell'equazione  $(k - 2)x^2 - (2k - 1)x + k + 1 = 0$  sono coincidenti

$$\left[ k = -\frac{9}{8} \right]$$

SOLUZIONE    è una equazione di 2° grado quindi bisogna imporre  $\Delta = 0$

$$b^2 - 4ac = 0 \quad (2k - 1)^2 - 4(k + 1)(k - 2) = 0$$

6. Per quali valori del parametro  $k$  le radici dell'equazione  $(k - 2)x^2 - (2k + 1)x + k + 1 = 0$  sono distinte e discordi? [  $-1 \leq k < 2$  ]

SOLUZIONE

il prodotto delle radici deve essere negativo. Ricordando che in una equazione di 2° grado del tipo  $ax^2 + bx + c = 0$ , dette  $x_1$  e  $x_2$  le sue radici, la relazione tra coefficienti e radici è la seguente:  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  e  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$ , segue che basta imporre che  $\frac{k+1}{k-2} < 0$  ed escludere il valore  $k=2$  che annulla il denominatore e rende l'equazione di primo grado.

7. Per quale valore di  $k$  le radici dell'equazione  $(k - 2)x^2 - (2k + 1)x + k + 1 = 0$  hanno come somma 1? [  $k = -3$  ]

SOLUZIONE

$x_1 + x_2 = 1$  quindi basta porre  $-\frac{b}{a} = 1$  cioè  $\frac{2k+1}{k-2} = 1$  con  $k \neq 2$ .

8. Le equazioni della simmetria centrale di centro  $M$  di coordinate  $(a,b)$  sono  $\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$ . Dato il punto  $P(2,-3)$  e il centro di simmetria  $M(3,1)$  determina le coordinate del suo trasformato  $P'$ . [  $P'(4,5)$  ]

SOLUZIONE

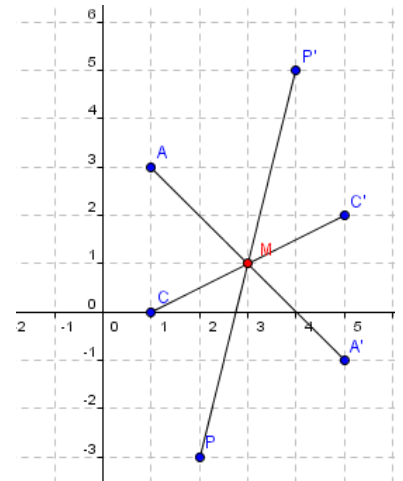
Due punti del piano si corrispondono in una simmetria centrale se il centro di simmetria è il punto medio del segmento che ha per estremi i punti stessi. (vedi figura)

Le coordinate del punto medio  $M(a,b)$  di un segmento di estremi  $P(x,y)$  e  $P'(x',y')$  sono:  $a = \frac{x+x'}{2}$ ,  $b = \frac{y+y'}{2}$ .

Ricavo da tali formule le coordinate del punto trasformato  $x'$  e  $y'$

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

Sostituendo i valori dati  $\begin{cases} x' = 2 \cdot 3 - 2 = 4 \\ y' = 2 \cdot 1 - (-3) = 5 \end{cases}$  si ottiene  $P'(4,5)$ .



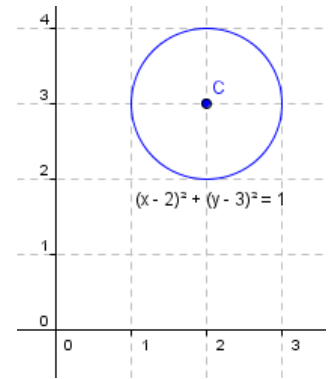
9. Scrivi le equazioni di una simmetria centrale di centro  $C(-5,4)$ .  $\begin{cases} x' = 2(-5) - x = -10 - x \\ y' = 2(4) - y = 8 - y \end{cases}$
10. Determina l'equazione cartesiana della curva  $\begin{cases} x = 2 - \cos t \\ y = 3 + \sin t \end{cases}$   $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$

SOLUZIONE

Per ottenere l'equazione cartesiana della curva dobbiamo avere come variabili solo x e y, quindi bisogna eliminare il parametro t. Il modo più veloce, in questo caso, consiste nell'isolare il seno e il coseno, elevare al quadrato, sommare le equazioni ottenute e utilizzare la 1° relazione fondamentale della trigonometria:

$$\begin{cases} x - 2 = -\cos t \\ y - 3 = \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 2)^2 = \cos^2 t \\ (y - 3)^2 = \sin^2 t \end{cases} \Rightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$$

è l'equazione di una circonferenza di centro C(2,3) e raggio  $r = 1$



11. Determina per quale valore del parametro m le rette di equazione

$(m - 3)x - (m + 1)y = m - 1$  e  $(m + 1)x + 3y = m + 3$  sono perpendicolari tra loro.  $[m = 6 \wedge m \neq -1]$

SOLUZIONE

Ricordando che il coefficiente angolare della retta r è  $m_r = -\frac{a}{b}$  e che due rette sono  $\perp$  tra loro se i loro coefficienti

angolari sono l'uno l'antireciproco dell'altro,  $m_s = -\frac{1}{m_r}$ , allora  $\frac{m - 3}{m + 1} = \frac{3}{m + 1} \Rightarrow m = 6 \wedge m \neq -1$

12. Date le equazioni parametriche del luogo geometrico  $\begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = -10t + 4 \end{cases}$  con  $-1 \leq t \leq 1$  determina l'equazione cartesiana del luogo.  $[y = -2x + 8 \text{ con } -3 \leq x \leq 7]$

SOLUZIONE Per ottenere l'equazione cartesiana della curva dobbiamo avere come variabili solo x e y, quindi bisogna eliminare il parametro t. In questo caso basta ricavare t dalla prima e sostituire nella seconda

$$\begin{cases} t = \frac{x - 2}{5} \\ - \end{cases} \Rightarrow y = -10\left(\frac{x - 2}{5}\right) + 4 \Rightarrow y = -2x + 8$$

a questo punto occorre trovare le limitazioni sulla variabile x note quelle sul parametro t:  $-1 \leq t \leq 1$

basta sostituire i valori estremi di t nella prima delle equazioni parametriche della curva  $x = 5t + 2$   
 $x = 5 \cdot (-1) + 2 = -3$  e  $x = 5 \cdot 1 + 2 = 7$  si ha dunque  $-3 \leq x \leq 7$

13. Determina il coefficiente angolare della tangente all'ellisse di equazione  $3x^2 + 2y^2 + 4x - 12y - 6 = 0$  nel suo punto di ascissa  $x_0 = 2$  con  $y_0 > 3$ .  $[m = -2\sqrt{2}]$

SOLUZIONE

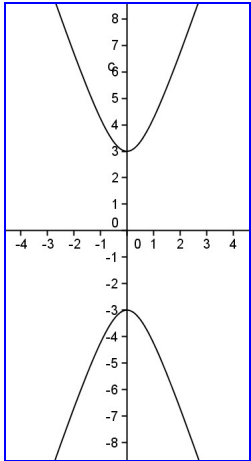
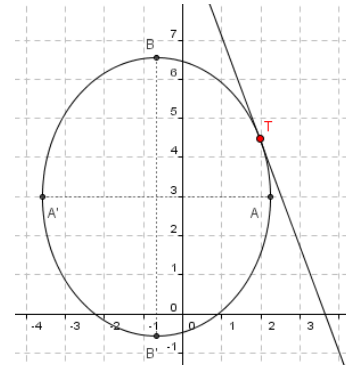
sostituendo  $x_0 = 2$  nell'equazione dell'ellisse si ottiene  $y_0^2 - 6y_0 + 7 = 0$  che ha come radici  $y_0 = 3 \pm \sqrt{2}$

Il punto di tangenza cercato è  $T(2; 3 + \sqrt{2})$ .

Usando il metodo di sdoppiamento  $3xx_0 + 2yy_0 + 4\frac{x+x_0}{2} - 12\frac{y+y_0}{2} - 6 = 0$  si ottiene

l'equazione della tangente in T:  $4x + \sqrt{2}y + 10 - 3\sqrt{2} = 0$

il cui coefficiente angolare è  $m = -\frac{a}{b} = -\frac{4}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2}$ .



14. L'equazione della conica riportata in figura è:

- a)  $x^2 + \frac{y^2}{9} = -1$    b)  $x^2 - \frac{y^2}{9} = -1$    c)  $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$    d)  $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$    [b]

SOLUZIONE

È un'iperbole riferita agli assi di simmetria, con asse trasverso lungo 6 e asse y come asse focale.

15. Ruotando di 90° l'ellisse di equazione  $5x^2 + 3y^2 = 15$  quale equazione si ottiene?   [  $3x^2 + 5y^2 = 15$  ]

16. È data la funzione omografica di equazione  $y = \frac{2x - 3}{2x + 4}$ . A quale iperbole equilatera non traslata essa corrisponde?   a)  $xy = -\frac{7}{2}$    b)  $xy = -\frac{2}{7}$    c)  $xy = \frac{7}{2}$    d)  $xy = \frac{2}{7}$    [a]

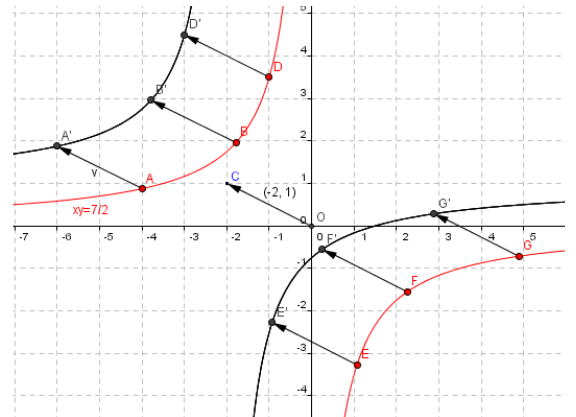
SOLUZIONE   Determino le coordinate del centro di simmetria

$C\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$   $C(-2, 1)$  che sono anche le componenti del vettore di

traslazione  $\vec{v}(-2, 1)$ . Uso il cambio di variabile  $x \rightarrow x - 2$     $y \rightarrow y + 1$

corrispondente alla traslazione inversa

$$y = \frac{2x - 3}{2x + 4} \quad y + 1 = \frac{2(x - 2) - 3}{2(x - 2) + 4}$$

$$y + 1 = \frac{2x - 7}{2x} \quad 2xy = 2x - 7 - 2x \quad xy = -\frac{7}{2}$$


ANALISI

17. Date le parabole di equazione  $y = ax^2 + 2$  con  $a \in \mathbb{R}$ , dimostra che i punti in cui la tangente è parallela alla bisettrice del II e IV quadrante sono  $P\left(-\frac{1}{2a}, \frac{1+8a}{4a}\right)$

SOLUZIONE

Si tratta di trovare il punto di tangenza noto il coefficiente angolare della tangente. La tangente citata, infatti, deve avere coefficiente angolare -1. Conviene, allora, calcolare la derivata e porla uguale a -1 per trovare l'ascissa del punto di tangenza.

La funzione derivata è  $f'(x) = 2ax$

impongo che nel punto di tangenza essa sia uguale al coefficiente angolare della bisettrice del II e IV quadrante:

$$2ax_0 = -1 \quad x_0 = -\frac{1}{2a}$$

sostituisco nell'equazione della parabola per trovare l'ordinata del punto di tangenza

$$y_0 = a\left(-\frac{1}{2a}\right)^2 + 2 = \frac{1+8a}{4a}$$

18. Date le parabole di equazione  $y = ax^2 + 2$  con  $a \in \mathbb{R}$ , dimostra che l'equazione parametrica del luogo geometrico dei punti delle parabole che hanno tangente parallela alla bisettrice del II e IV quadrante è:

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2a} \\ y = \frac{1+8a}{4a} \end{cases}$$

SOLUZIONE È il quesito precedente espresso con altre parole!

19. L'equazione cartesiana del luogo geometrico del quesito precedente è:

a)  $y + x^2 + 2 = 0$    b)  $y = -x^2 + 2$    c)  $2y + x + 4 = 0$    d)  $2y + x - 4 = 0$  [d]

SOLUZIONE

Le equazioni parametriche del luogo geometrico sono espresse in funzione del parametro  $a$  che deve essere eliminato per ottenere l'equazione cartesiana del luogo

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2a} \\ y = \frac{1+8a}{4a} \end{cases} \text{ ricavo } a \text{ dalla prima } a = -\frac{1}{2x} \text{ e sostituisco nella seconda } y = \frac{1+8\left(-\frac{1}{2x}\right)}{4\left(-\frac{1}{2x}\right)} = \frac{\frac{x-4}{x}}{-\frac{2}{x}} = \frac{4-x}{2}$$

ottengo quindi  $2y = 4 - x$  equazione di una retta.

20. Le due funzioni  $f(x) = \ln(x^2 - 4)$  e  $g(x) = \ln(x - 2) + \ln(x + 2)$  sono uguali? Hanno lo stesso grafico? (motiva adeguatamente la risposta senza disegnare il grafico). [no, perché non hanno lo stesso dominio]

21. Se  $f'(x_0) = \frac{\sqrt{3}}{3}$  qual è l'angolo che la retta tangente al grafico di  $f(x)$  nel suo punto di ascissa  $x_0$  forma con l'asse x?  $\left[ \alpha = \frac{\pi}{6} \right]$

22. La funzione  $f(x) = \sin 2x - 2\sin \frac{x}{2}$  ha massimo assoluto nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ ?

[sì, perché vale il teorema di Weierstrass, infatti ...]

23. Siano a e b due costanti reali. Sapendo che  $f(x) = a \cdot x \cdot \sin x + b \ln|x| - x^4$  e che  $f(2) = 3$  puoi calcolare  $f(-2)$ ?

SOLUZIONE la funzione data è pari poiché  $f(x) = f(-x)$ , dunque  $f(-2) = f(2) = 3$

24. Il  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{48} \sin \frac{6}{x}$  vale:

- a) non esiste      b) 0      c)  $\frac{1}{8}$       d)  $+\infty$

(motiva adeguatamente la risposta)

[c]

SOLUZIONE pongo  $t = \frac{6}{x}$ , per  $x \rightarrow \infty$  si ha che  $t \rightarrow 0$ . Quindi  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{48} \sin \frac{6}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{8} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{8}$

avendo usato il limite notevole  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$

25. Determina gli asintoti della funzione  $f(x) = \ln\left(\frac{3x+2}{x-4}\right)$

[due asintoti orizzontali ed un asintoto verticale  $x = -\frac{2}{3}$ ,  $x = 4$ ,  $y = \ln 3$ ]

26. Determina gli asintoti della funzione  $f(x) = \sqrt{\frac{3x+2}{x-4}}$  [due asintoti  $y = \sqrt{3}$ ,  $x = 4$ ]

27. Determina gli asintoti della funzione  $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+2}}{x-4}$  [tre asintoti  $y = \pm\sqrt{3}$ ,  $x = 4$ ]

SOLUZIONE calcolo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3x^2+2}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{\left(3+\frac{2}{x^2}\right)}}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{3}}{x} = \pm\sqrt{3}$

28. Determina il valore del parametro che rende la funzione  $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{con } x \leq 1 \\ 4-2ax^2 & \text{con } x > 1 \end{cases}$  continua in  $x=1$ . La funzione così trovata è anche derivabile in  $x=1$ ? [ $a=2$ , è continua ma non è derivabile]

29. La quantità di carica, espressa in coulomb, che attraversa la sezione di un conduttore filiforme metallico ha la seguente legge oraria  $q(t) = 3t^2 - 2t + 1$ , con  $t$  espresso in secondi. Determina l'intensità di corrente che attraversa il conduttore nell'istante  $t = 3s$ .

$$[i(t) = q'(t) = 6t - 2; i(3) = 16A]$$

GEOMETRIA E TRIGONOMETRIA

30. L'area di un triangolo qualunque ABC in cui  $a = 6\sqrt{2}$   $b = 4\sqrt{3}$   $\gamma = 75^\circ$  è

- a)  $6\sqrt{3}$     b)  $\sqrt{6}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$     c)  $6(\sqrt{3} + 3)$     d)  $12(\sqrt{3} + 3)$  [c]

SOLUZIONE  $A = \frac{1}{2} ab \sin \gamma$      $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

31. Quale delle seguenti funzioni è uguale a  $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$

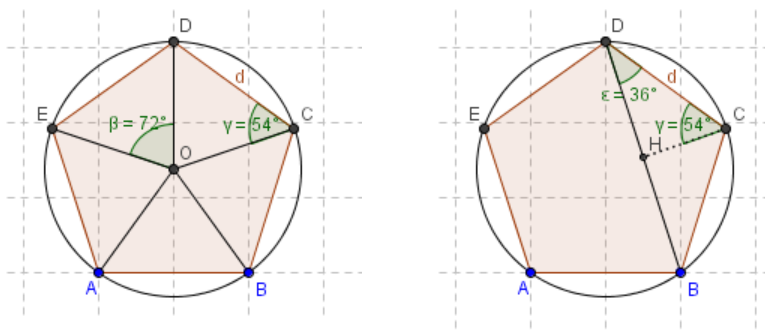
- a)  $2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$     b)  $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$     c)  $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$     d)  $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$  [b]

SOLUZIONE si usa il metodo dell'angolo aggiunto con  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3+1} = 2$  e  $\alpha = \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

32. Dimostra che  $1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$

33. La lunghezza della diagonale di un pentagono regolare il cui lato misura  $d$  è

- a)  $d \cdot \sin \frac{2}{5}\pi$     b)  $d \cdot \cos \frac{2}{5}\pi$     c)  $2d \cdot \sin \frac{\pi}{5}$     d)  $2d \cdot \cos \frac{\pi}{5}$  [d]



angolo al centro  $\widehat{DOE} = 72^\circ = \frac{2\pi}{5}$

nel triangolo HDC:  $\widehat{HDC} = 36^\circ = \frac{\pi}{5}$        $\overline{DB} = 2\overline{DH} = 2 \cdot d \cdot \cos \frac{\pi}{5}$

34. Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo di lato s=10cm. Considera il piano  $\alpha$  passante per D, B, C, come risulta diviso il cubo da questo piano? Quanto valgono i volumi del cubo e delle parti in cui esso è suddiviso dal piano  $\alpha$  ?

SOLUZIONE

Il piano divide la base del cubo in due parti uguali. La piramide ha la stessa altezza del cubo, quindi il volume è

$$V = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot \overline{AD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} l^2 \cdot l = \frac{1}{6} l^3 = \frac{1000}{6} \text{ cm}^3$$

35. Calcola la distanza tra il piano  $\alpha$  e il vertice A del cubo dell'esercizio precedente.

SOLUZIONE

Bisogna determinare l'altezza della piramide. Dal volume si può calcolare l'altezza h invertendo la formula:

$$V = \frac{1}{3} S_{DBC} h \quad h = \frac{3V}{S_{DBC}}$$

Il triangolo DBC è equilatero, il lato DB è la diagonale di una faccia del cubo, dunque

$$\overline{DB} = s\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}.$$

$$S_{DBC} = \frac{1}{2} s\sqrt{2} \cdot s\sqrt{2} \sin 60^\circ = s^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 100 \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3} \text{ cm}^2$$

$$h = \frac{3V}{S_{DBC}} = \frac{3 \cdot \frac{1000}{6} \text{ cm}^3}{50\sqrt{3} \text{ cm}^2} = \frac{500}{50\sqrt{3}} \text{ cm} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ cm}$$

36. Dimostra la formula  $\text{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$