Liceo Scientifico Leonardo da Vinci

PROVA DI MATEMATICA CLASSI QUINTE

12/2/2013

<u>Il candidato risolva, a sua scelta, uno dei seguenti problemi e risponda a cinque quesiti del questionario:</u>

PROBLEMA 1

In una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ è data la corda $\overline{AQ} = r\sqrt{2}$*;* prendere sulla circonferenza due punti *T* e *S* simmetrici rispetto al diametro *AB* in modo che *S* appartenga all'arco *AQ,* e porre l'angolo $A\hat{B}S = x$.

a. Determinare la misura degli angoli al centro e alla circonferenza che insistono su *AQ,* e trovare le limitazioni geometriche sull'angolo *x*.

b. Esprimere in funzione di *x* il rapporto $\dfrac{\overline{AQ} - \overline{QS}}{\overline{ST}}$, e calcolare il limite a cui tende tale rapporto al tendere di *S* a *A* e al tendere di *S* ad *Q*.

c. Trovata $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \cdot \dfrac{1 - \cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$, stabilire per quali *x* il suo grafico si trova nel semipiano y>0 e per quali *x* nel semipiano y<0, nell'intervallo $[0,2\pi]$.

d. Classificare le discontinuità della funzione $f(x)$ sull'intervallo $[0,2\pi]$.

e. Determinare i punti del grafico di $f(x)$ nei quali la tangente è parallela all'asse *x*.

PROBLEMA 2

In un sistema di riferimento cartesiano è data la funzione di equazione $y = \dfrac{ax^3 + bx^2 + 1}{x^2 + cx}$.

a. Determinare i coefficienti della funzione sapendo che il suo grafico ha un asintoto in $y = 2$ e uno in $x = -2$.

b. Dopo aver verificato che si tratta della curva $y = \dfrac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x}$, rappresentare il suo grafico, determinandone anche i punti a tangente orizzontale e l'intersezione *A* con l'asintoto orizzontale.

c. Studiare per quali valori di *k* esistono le intersezioni della retta (*r*) $y = k$ con la curva, e utilizzare quanto trovato per dedurre il codominio della funzione.

d. Siano *M* e *N* i punti di intersezione della generica retta *r* con la curva, e sia *B* il punto della curva di ascissa 1; calcolare il limite del rapporto fra le aree di *AMN* e *BMN* , al tendere della retta *r* alla tangente in *B*.

e. Trovare il luogo descritto dal punto *P*, punto medio di *M* e *N*, al variare della retta r. Il luogo trovato è una funzione invertibile? Quale è l'espressione analitica della sua inversa?

QUESITI

1) È assegnato il cubo $ABCDA'B'C'D'$. Tracciato il piano di sezione passante per $A'BC'$, con $A'B$ e BC' diagonali delle facce che concorrono nel vertice B', determina il rapporto dei volumi dei due solidi in cui esso risulta diviso.

2) Determina il dominio, gli zeri, il segno e i limiti negli estremi del campo di esistenza della funzione $y = \arcsin \dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$.

3) Determinare che condizioni deve soddisfare il parametro *k* affinché la seguente funzione sia continua in $x = -2$:

$$y = \begin{cases} 2 + \sqrt{-x^2 + kx - 12} & x < -2 \\ 2 - \sqrt{x+2} & x \geq -2 \end{cases}$$

Determinare il dominio della funzione trovata e stabilire se è derivabile in ogni suo punto.

4) Traduci la seguente scrittura utilizzando il linguaggio dei limiti

$$\forall M > 0,\ \exists \delta > 0 :\ \forall x \text{ con } -2 < x < -2 + \delta,\ \frac{3}{2x+4} > M .$$

Esegui la verifica del limite, rappresenta il grafico della funzione evidenziando il limite precedente, e rappresenta graficamente $y = |f(x)|$.

5) Dopo aver definito le discontinuità di una funzione, classifica le discontinuità di $y = \dfrac{1-e^x}{\operatorname{sen} x}$.

6) Date le tre funzioni $f(x) = \dfrac{x-1}{4x^2-1}$, $g(x) = \ln(2x^2 - x)$, $h(x) = \sqrt{2x-1}$, dire, motivando adeguatamente le risposte, quali di esse verificano le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo $\left[\dfrac{1}{2}, 4\right]$ e quali di esse verificano le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $\left[\dfrac{3}{4}, 2\right]$.

7) Il limite della funzione $\dfrac{senx - \cos x}{x}$ quando $x \to +\infty$:

a) è uguale a 0; b) è uguale ad 1; c) è un valore diverso dai due precedenti; d) non è calcolabile.

Una sola risposta è corretta, individuarla e motivarla adeguatamente.

8) Si consideri la seguente equazione in *x*: $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$, dove *k* è un parametro reale diverso da 2. Calcolare il limite della somma delle sue radici quando $k \to 2$, $k \to +\infty$, $k \to -\infty$.

9) Date le curva di equazione $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ e $g(x) = -x^2 + 6$, determina le coordinate del punto comune *A* di ascissa intera. Calcola l'angolo fra le tangenti ai grafici delle funzioni nel punto *A*.

10) Enunciare la definizione di derivata, e applicarla per trovare la derivata della funzione $y = e^{2x+1}$ in un generico punto del suo dominio.