

**Liceo Scientifico Leonardo da Vinci**  
**PROVA DI MATEMATICA CLASSI QUINTE**  
**12/2/2013**

**Il candidato risolve, a sua scelta, uno dei seguenti problemi e risponde a cinque quesiti del questionario:**

**PROBLEMA 1**

In una circonferenza di diametro  $\overline{AB} = 2r$  è data la corda  $\overline{AQ} = r\sqrt{2}$ ; prendere sulla circonferenza due punti  $T$  e  $S$  simmetrici rispetto al diametro  $AB$  in modo che  $S$  appartenga all'arco  $AQ$ , e porre l'angolo  $\widehat{ABS} = x$ .

- a. Determinare la misura degli angoli al centro e alla circonferenza che insistono su  $AQ$ , e trovare le limitazioni geometriche sull'angolo  $x$ .
- b. Esprimere in funzione di  $x$  il rapporto  $\frac{\overline{AQ} - \overline{QS}}{\overline{ST}}$ , e calcolare il limite a cui tende tale rapporto al tendere di  $S$  a  $A$  e al tendere di  $S$  ad  $Q$ .
- c. Trovata  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \frac{1 - \cos x + \sin x}{\cos x \cdot \sin x}$ , stabilire per quali  $x$  il suo grafico si trova nel semipiano  $y > 0$  e per quali  $x$  nel semipiano  $y < 0$ , nell'intervallo  $[0, 2\pi]$ .
- d. Classificare le discontinuità della funzione  $f(x)$  sull'intervallo  $[0, 2\pi]$ .
- e. Determinare i punti del grafico di  $f(x)$  nei quali la tangente è parallela all'asse  $x$ .

**PROBLEMA 2**

In un sistema di riferimento cartesiano è data la funzione  $y$  di equazione  $y = \frac{ax^3 + bx^2 + 1}{x^2 + cx}$ .

- a. Determinare i coefficienti della funzione sapendo che il suo grafico ha un asintoto in  $y = 2$  e uno in  $x = -2$ .
- b. Dopo aver verificato che si tratta della curva  $y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 2x}$ , rappresentare il suo grafico, determinandone anche i punti a tangente orizzontale e l'intersezione  $A$  con l'asintoto orizzontale.
- c. Studiare per quali valori di  $k$  esistono le intersezioni della retta  $(r) y = k$  con la curva, e utilizzare quanto trovato per dedurre il codominio della funzione.
- d. Siano  $M$  e  $N$  i punti di intersezione della generica retta  $r$  con la curva, e sia  $B$  il punto della curva di ascissa 1; calcolare il limite del rapporto fra le aree di  $AMN$  e  $BMN$ , al tendere della retta  $r$  alla tangente in  $B$ .
- e. Trovare il luogo descritto dal punto  $P$ , punto medio di  $M$  e  $N$ , al variare della retta  $r$ . Il luogo trovato è una funzione invertibile? Quale è l'espressione analitica della sua inversa?

## QUESITI

- 1) È assegnato il cubo  $ABCD A'B'C'D'$ . Tracciato il piano di sezione passante per  $A'BC'$ , con  $A'B$  e  $BC'$  diagonali delle facce che concorrono nel vertice  $B'$ , determina il rapporto dei volumi dei due solidi in cui esso risulta diviso.

- 2) Determina il dominio, gli zeri, il segno e i limiti negli estremi del campo di esistenza della funzione

$$y = \arcsen \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}.$$

- 3) Determinare che condizioni deve soddisfare il parametro  $k$  affinché la seguente funzione sia continua in  $x = -2$ :

$$y = \begin{cases} 2 + \sqrt{-x^2 + kx - 12} & x < -2 \\ 2 - \sqrt{x+2} & x \geq -2 \end{cases}$$

Determinare il dominio della funzione trovata e stabilire se è derivabile in ogni suo punto.

- 4) Traduci la seguente scrittura utilizzando il linguaggio dei limiti

$$\forall M > 0, \exists \delta > 0: \forall x \text{ con } -2 < x < -2 + \delta, \frac{3}{2x+4} > M.$$

Esegui la verifica del limite, rappresenta il grafico della funzione evidenziando il limite precedente, e rappresenta graficamente  $y = |f(x)|$ .

- 5) Dopo aver definito le discontinuità di una funzione, classifica le discontinuità di  $y = \frac{1-e^x}{\sin x}$ .

- 6) Date le tre funzioni  $f(x) = \frac{x-1}{4x^2-1}$ ,  $g(x) = \ln(2x^2-x)$ ,  $h(x) = \sqrt{2x-1}$ , dire, motivando adeguatamente le risposte, quali di esse verificano le ipotesi del teorema di Weierstrass nell'intervallo  $\left[\frac{1}{2}, 4\right]$  e quali di esse verificano le ipotesi del teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo  $\left[\frac{3}{4}, 2\right]$ .

- 7) Il limite della funzione  $\frac{\sin x - \cos x}{x}$  quando  $x \rightarrow +\infty$ :

a) è uguale a 0; b) è uguale ad 1; c) è un valore diverso dai due precedenti; d) non è calcolabile.

Una sola risposta è corretta, individuarla e motivarla adeguatamente.

- 8) Si consideri la seguente equazione in  $x$ :  $(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$ , dove  $k$  è un parametro reale diverso da 2. Calcolare il limite della somma delle sue radici quando  $k \rightarrow 2$ ,  $k \rightarrow +\infty$ ,  $k \rightarrow -\infty$ .

- 9) Date le curva di equazione  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  e  $g(x) = -x^2 + 6$ , determina le coordinate del punto comune A di ascissa intera. Calcola l'angolo fra le tangenti ai grafici delle funzioni nel punto A.

- 10) Enunciare la definizione di derivata, e applicarla per trovare la derivata della funzione  $y = e^{2x+1}$  in un generico punto del suo dominio.