Liceo Scientifico Leonardo da Vinci

PROVA DI MATEMATICA CLASSI QUINTE

16/02/2012

Il candidato risolva, a sua scelta, uno dei due problemi e risponda a cinque dei dieci quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

1) Si determinino i coefficienti *a,b,c* della funzione $f(x)=\dfrac{ax^3+bx^2-2x-1}{x^2+c}$ sapendo che ammette come asintoto orizzontale la retta $y=1$ e come asintoto verticale l'asse delle ordinate.
2) Verificato che risulta $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2}$, si studi il grafico della $f(x)$, con particolare attenzione per i punti stazionari e per i punti di flesso, determinando la tengente inflessionale. Si rappresenti il grafico in un sistema di assi cartesiani xOy.
3) Data la funzione $g(x)=\dfrac{2}{x^2}$, si calcolino le coordinate dei punti comuni tra $f(x)$ e $g(x)$ e si determini l'equazione della retta s su cui essi giacciono. Si rappresenti graficamente $g(x)$ nel medesimo sistema di assi cartesiani xOy.
4) Sia *A* il punto comune alle due curve avente ascissa minore. Si determini l'equazione della tangente *t* a $g(x)$ nel punto *A.*
5) Si determini l'equazione della parabola avente per asse di simmetria l'asse y e tangente in *A* e alla retta *t.*

PROBLEMA 2

Sia γ una circonferenza di centro *C* e raggio unitario e sia *P* un punto esterno ad essa. Si conducano da P le tangenti a γ e siano *A* e *B* i punti di tangenza. Sia *Q* l'estremo del diametro situato dalla parte opposta di P rispetto a C.

a) Esprimere in funzione di $\overline{CP}=x$ le funzioni goniometriche degli angoli e le misure dei lati del triangolo *ACP;*
b) Trovare la misura del segmento *AQ* e la funzione $f(x)=\dfrac{1}{\overline{AP}^2}+\dfrac{1}{\overline{AQ}^2}$
c) Verificato che risulta $f(x)=\dfrac{x^2-x+2}{2(x^2-1)}$, studiare la funzione e rappresentarne il grafico, tralasciando lo studio della derivata seconda.
d) Trovare la tangente nel punto di intersezione con l'asse *y.*
e) Posto infine $\overline{CP}=\dfrac{5}{3}$ determinare l'ampiezza degli angoli del triangolo *QAB.*

QUESITI

1. É data una circonferenza di centro *O* e raggio *r*; detto *P* un punto tale che $\overline{PO} = 2r$, si conducano le due tangenti *PA* e *PB* alla circonferenza, e si calcoli l'area della parte di piano compresa tra dette tangenti e il minore degli archi *AB* della circonferenza.

2. Determinare quanto vale il seguente limite al variare del parametro *a*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(a^2-1)x^3+(a+1)x^2-2x}{x^2-3x}$$

3. Dopo aver definito le varie specie di discontinuità di una funzione, studiare le singolarità di

$$y=\frac{x^2-x-6}{x^3-4x}$$

4. Date le funzioni $f(x)=\log_3(-x)$ e $g(x)=\log_3(9-x)$, calcolare per quali valori di *x* è verificata la relazione $|f(x)-g(x)|=|f(x)+g(x)|$.

5. Una sfera è inscritta in un cubo; qual è il rapporto fra il volume della sfera e quello del cubo?

6. Quale fra le seguenti funzioni è rappresentata dal grafico in figura? Motivare adeguatamente la risposta.

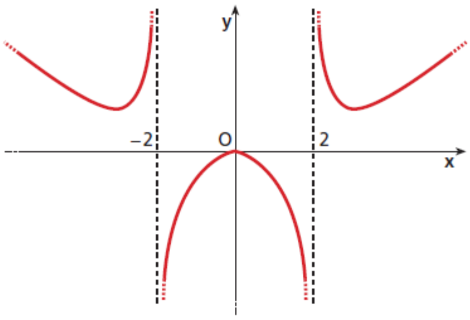
a. $y=x(x^2-4)$

b. $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$

c. $y=\dfrac{x^4}{x^2-4}$

d. $y=\dfrac{4x^2}{x^2-4}$

e. $y=\dfrac{x^2-4}{x^2}$



7. Si calcoli il limite per *x* che tende a zero della funzione $f(x)=\dfrac{e^{x^3}-1}{x\cdot \operatorname{sen}^2 x}$

8. Si determini il campo di esistenza della funzione:

$$y=\frac{\sqrt{2sen(2x)-\sqrt{3}}}{\log\cos x}, \text{ con } 0\le x\le 2\pi \ .$$

9. Due punti materiali si muovono l'uno verso l'altro sulla stessa retta con equazioni orarie $s_1=3t^2-2t$ e $s_2=3+\frac{1}{2}t+t^2$; calcolare le loro velocità nell'istante in cui si incontrano.

10. Dopo avere dato la definizione di derivata di una funzione applicarla per calcolare la derivata della funzione $f(x)=\sqrt{x^3}$.