Simulazione di II prova del 16/02/2012

Problema 1

1) Si determinino i coefficienti a, b, c della funzione $f(x)=\frac{ax^3+bx^2-2x-1}{x^2+c}$ sapendo che ammette asintoto orizzontale $y=1$ e asintoto verticale $x=0$.

Se ammette asintoto orizzontale il grado del numeratore e il grado del denominatore devono essere uguali $\Rightarrow \boxed{a=0}$

Se l'asintoto deve essere $y=1$, allora

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{bx^2-2x-1}{x^2+c}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(b-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{c}{x^2})}=b \Rightarrow \begin{cases}y=b\\ y=1\end{cases} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Se ammette asintoto verticale in $x=0$, allora il denominatore deve avere come radice $x_0=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

Quindi la funzione è $f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x^2}$

2) Studiare il grafico completo

$f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x^2}$ $\quad D=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ $\quad$ né pari, né dispari

Zeri $\begin{cases}y=0\\ \frac{x^2-2x-1}{x^2}=0\end{cases}$ $\begin{cases}-\\ x^2-2x-1=0\end{cases}$ $\begin{cases}y_1=0\\ x_1=1-\sqrt{2}\end{cases}\vee\begin{cases}y_2=0\\ x_2=1+\sqrt{2}\end{cases}$

$x_{1,2}=1\pm\sqrt{1+1}$ $\quad P(1-\sqrt{2};0)$ $\quad Q(1+\sqrt{2};0)$

Segno $N>0$ $\quad x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2}$

$D>0$ $\quad x^2>0$ $\quad x\neq 0$

		$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$	
N	+	0	−		−	0	+
D	+		+	0	+		+
N/D	+	0	−	∄	−	0	+

I.P. $\quad x<1-\sqrt{2} \vee x>1+\sqrt{2}$

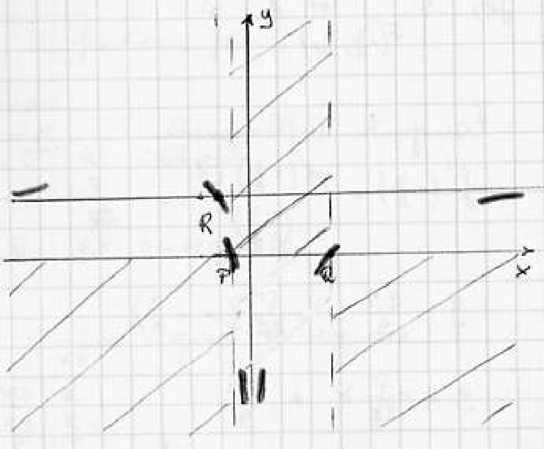
Limiti e asintoti

$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x-1}{x^2}=1$ per la condizione precedente

$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^2-2x-1}{x^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$

$\begin{cases}y=1\\ y=\frac{x^2-2x-1}{x^2}\end{cases}$ $\begin{cases}-\\ \frac{x^2-2x-1-x^2}{x^2}=0\end{cases}$

$\begin{cases}-\\ \frac{2x+1}{x^2}=0\end{cases}$ $\begin{cases}y=1\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}$ $\quad R(-\frac{1}{2};1)$



Studio la derivata prima

$$y' = \frac{(2x-2)x^2 - 2x(x^2-2x-1)}{x^4} = \frac{x(2x-2) - 2(x^2-2x-1)}{x^3} = \frac{\cancel{2x^2} - 2x - \cancel{2x^2} + 4x + 2}{x^3}$$

$$y' = \frac{2x+2}{x^3} \qquad D' \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \qquad \frac{2x+2}{x^3} = 0 \qquad 2x+2 = 0 \qquad x = -1$$

$f'(x) > 0$ $\quad N > 0 \quad 2(x+1) > 0 \quad x > -1$

$\quad D > 0 \quad x^3 > 0 \quad x > 0$

		-1		0		D
N	$-$	0	$+$		$+$	
D	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x) = N/D$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$	
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

$M(-1; y_M)$

M minimo stazionario perché $f'(-1) = 0$

$$y_M = \frac{(-1)^2 - 2(-1) - 1}{(-1)^2} = \frac{1+2-1}{1} = 2$$

$M(-1; 2)$

Studio la derivata seconda

$$y'' = \frac{2 \cdot x^3 - 3x^2(2x+2)}{x^6} = \frac{2x - 3(2x+2)}{x^4} = \frac{2x - 6x - 6}{x^4} = \frac{-4x-6}{x^4}$$

$$y'' = \frac{-2(2x+3)}{x^4} \qquad D'' \quad x \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \qquad 2x+3 = 0 \qquad x = -\frac{3}{2}$$

$f''(x) > 0$ $\quad N > 0 \quad -4x-6 > 0 \quad 4x+6 < 0 \quad x < -\frac{3}{2}$

$\quad D > 0 \quad x^4 > 0 \quad x \neq 0$

		$-\frac{3}{2}$		0		D
N	$+$	0	$-$		$-$	
D	$+$		$+$	0	$+$	
$f''(x) = N/D$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	
$f(x)$	$\cup$		$\cap$	$\nexists$	$\cap$	

$F(-\frac{3}{2}; y_F)$

F flesso obliquo discendente

$$y_F = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(-\frac{3}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\frac{9}{4} + 4}{\frac{9}{4}} = \frac{25}{4} \cdot \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$$

$F\left(-\frac{3}{2}; \frac{25}{9}\right)$

tangente inflessionale

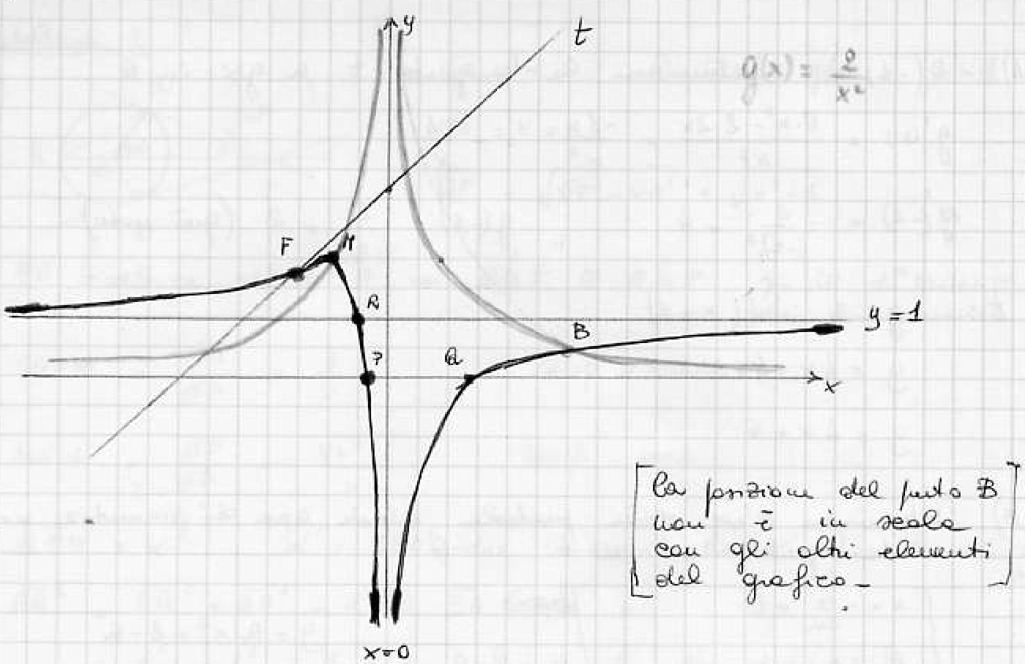
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{2\left(-\frac{3}{2}\right) + 2}{\left(-\frac{3}{2}\right)^3} = -\frac{8}{27}$$

$$y - \frac{25}{9} = -\frac{8}{27}\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$y = -\frac{8}{27}x + \frac{29}{9}$$

x	y
0	$29/9 \simeq 3{,}2$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{25}{9}$



3) $g(x) = \frac{2}{x^2}$ Calcolare le coordinate dei punti comuni e l'eq. della retta s passante per essi. Fare il grafico.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x^2} \\ y = \frac{x^2-2x-1}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ \frac{x^2-2x-1}{x^2} = \frac{2}{x^2} \end{cases} \qquad \begin{cases} - \\ \frac{x^2-2x-1-2}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \begin{matrix} +3 \\ -1 \end{matrix} \qquad \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y_2 = \frac{2}{9} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$$A(-1; 2) \equiv H \qquad B\left(3; \frac{2}{9}\right)$$

$$s: \quad m = \frac{2 - \frac{2}{9}}{-1-3} = \frac{16}{9} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{4}{9}$$

$$y - 2 = -\frac{4}{9}(x+1) \qquad y = -\frac{4}{9}x + \frac{14}{9}$$

Studio il grafico D $x \neq 0$ funzione pari

Non ha zeri; è sempre positiva

$$\lim_{x \to 0^\pm} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \qquad x = 0 \text{ as. verticale}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{+\infty} = 0^+ \qquad y = 0 \text{ as. orizzontale}$$

Passa per i punti A e B: si può già disegnare.

4) $A(-1;2)$ Determinare la tangente t a $g(x)$ in A

$$g'(x) = \frac{0\cdot x^2 - 2\cdot 2x}{x^4} = \frac{-4x}{x^4} = -\frac{4}{x^3}$$

$$g'(-1) = -\frac{4}{(-1)^3} = 4 \qquad g(-1) = \frac{2}{(-1)^2} = 2 \text{ (già noto)}$$

t: $y - 2 = 4(x+1)$

$y = 4x + 4 + 2$

$y = 4x + 6$

5) Determinare l'eq. della parabola avente asse di simmetria $x=0$ e tangente ~~ad~~ a t in A

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = 0 \\ 2 = a - b + c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 0 \\ c = 2 - a \end{cases} \qquad y = ax^2 + 2 - a$$

$y' = 2ax$

tangente t in A $\Rightarrow$ $m = f'(x) = 4$ $\qquad 2a(-1) = 4 \Rightarrow a = -2$

$y = -2x^2 + 4$