

Simulazione di II prova del 16/02/2012

Problema 1

1) Si determinino i coefficienti a, b, c della funzione $f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 - 2x - 1}{x^2 + c}$

sapendo che ammette asintoto orizzontale $y=1$ e asintoto verticale $x=0$.

Se ammette asintoto orizzontale il grado del numeratore e il grado del denominatore devono essere uguali $\Rightarrow \boxed{a=0}$

Se l'asintoto deve essere $y=1$, allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{bx^2 - 2x - 1}{x^2 + c} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(b - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{c}{x^2})} = b \Rightarrow \begin{cases} y=b \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{b=1}$$

Se ammette asintoto verticale in $x=0$, allora il denominatore deve avere come radice $x_0=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

Quindi la funzione è $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2}$

2) Studiare il grafico completo

$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2}$ $D = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ in pari, in dispari

zeri $\begin{cases} y=0 \\ \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y_1=0 \\ x_1 = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} y_2=0 \\ x_2 = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$
 $P(1 - \sqrt{2}; 0)$ $Q(1 + \sqrt{2}; 0)$

segno

$N > 0$	$x < 1 - \sqrt{2}$	\vee	$x > 1 + \sqrt{2}$	$1 - \sqrt{2}$	0	$1 + \sqrt{2}$
$D > 0$	$x^2 > 0$		$x \neq 0$	N	$+$	$+$
				D	$+$	$+$
				N/D	\oplus	\oplus

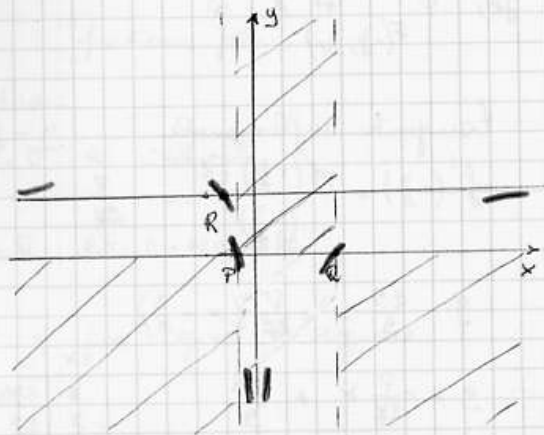
I.P. $x < 1 - \sqrt{2}$ \vee $x > 1 + \sqrt{2}$

Limiti e asintoti

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2} = 1$ per la condizione precedente

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

$\begin{cases} y=1 \\ y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 1 - x^2}{x^2} = 0 \\ \frac{-2x - 1}{x^2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad R(-\frac{1}{2}; 1)$



Studio con derivata prima

$$y' = \frac{(2x-2)x^2 - 2x(x^2-2x-1)}{x^4} = \frac{x(2x-2) - 2(x^2-2x-1)}{x^3} = \frac{2x^2 - 2x - 2x^2 + 4x + 2}{x^3}$$

$$y' = \frac{2x+2}{x^3} \quad D' \quad x \neq 0$$

$$f'(x) = 0 \quad \frac{2x+2}{x^3} = 0 \quad 2x+2=0 \quad x=-1$$

$$f'(x) > 0 \quad N > 0 \quad 2(x+1) > 0 \quad x > -1$$

$$D > 0 \quad x^3 > 0 \quad x > 0$$

	-1	0	
N	-	0	+
D	-	-	+
$f' = N/D$	+	0	-

Il numero stazionario preciso $f(-1) = 0$

$$y_H = \frac{(-1)^2 - 2(-1) - 1}{(-1)^2} = \frac{1+2-1}{1} = 2$$

$H(-1; 2)$

$f(x) \nearrow \searrow \nearrow$
 $H(-1; y_H)$

Studio con derivata seconda

$$y'' = \frac{2x^3 - 3x^2(2x+2)}{x^6} = \frac{2x - 3(2x+2)}{x^4} = \frac{2x - 6x - 6}{x^4} = \frac{-4x-6}{x^4}$$

$$y'' = \frac{-2(2x+3)}{x^4} \quad D'' \quad x \neq 0$$

$$f''(x) = 0 \quad 2x+3=0 \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$f''(x) > 0 \quad N > 0 \quad -4x-6 > 0 \quad 4x+6 < 0 \quad x < -\frac{3}{2}$$

$$D > 0 \quad x^4 > 0 \quad x \neq 0$$

	$-\frac{3}{2}$	0	
N	+	0	-
D	+	+	+

$f'' = N/D$

$f(x) \cap \cup \cap \cup$
 $F(-\frac{3}{2}; y_F)$

F punto obliquo discendente

$$y_F = \frac{(-\frac{3}{2})^2 - 2(-\frac{3}{2}) - 1}{(-\frac{3}{2})^2} = \frac{\frac{9}{4} + 3 - 1}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{9}{4} + 4}{\frac{9}{4}} = \frac{25 \cdot 4}{4 \cdot 9} = \frac{25}{9}$$

$F(-\frac{3}{2}; \frac{25}{9})$

tangente inflectionale

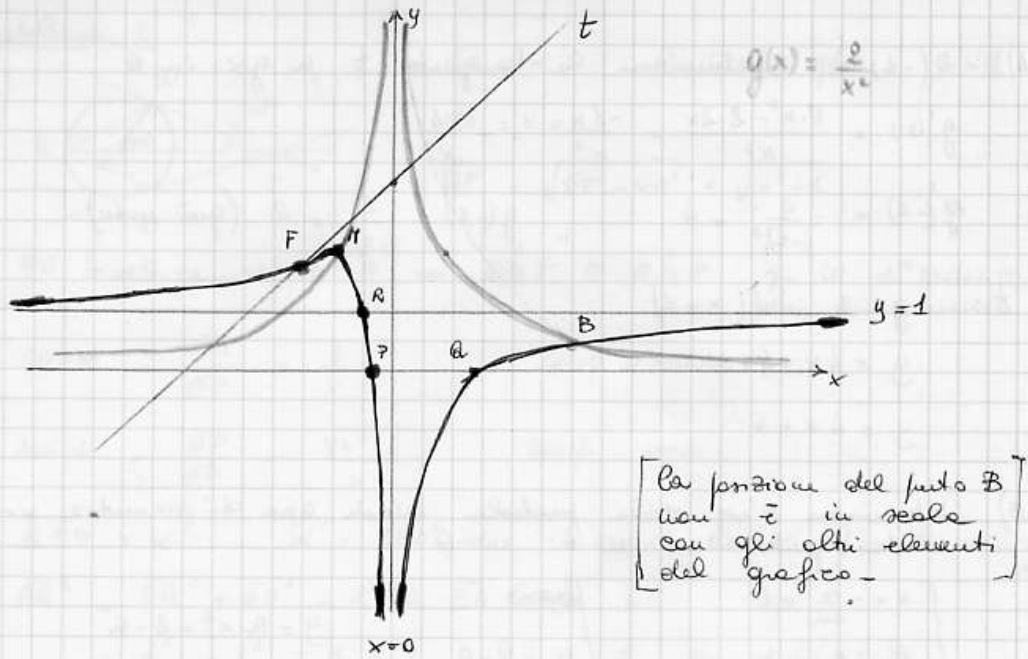
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(-\frac{3}{2}) = \frac{2(-\frac{3}{2}) + 2}{(-\frac{3}{2})^3} = -\frac{8}{27}$$

$$y - \frac{25}{9} = -\frac{8}{27}(x - \frac{3}{2})$$

$$y = -\frac{8}{27}x + \frac{29}{9}$$

x	y
0	$\frac{29}{9} \approx 3,2$
$-\frac{3}{2}$	$\frac{25}{9}$



3) $g(x) = \frac{2}{x^2}$ Calcolare le coordinate dei punti comuni e l'eq. della retta S passante per essi. Fare il grafico.

$$\begin{cases} y = \frac{2}{x^2} \\ y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2} = \frac{2}{x^2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \frac{x^2 - 2x - 1 - 2}{x^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} x^2 - 2x - 3 = 0 \\ +3 \\ -1 \end{array} \quad \begin{cases} y_1 = 2 \\ x_1 = -1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y_2 = \frac{2}{9} \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

$A(-1; 2) = H$ $B(3; \frac{2}{9})$

$$S: \quad m = \frac{2 - \frac{2}{9}}{-1 - 3} = \frac{16}{9} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{4}{9}$$

$$y - 2 = -\frac{4}{9}(x + 1) \quad y = -\frac{4}{9}x + \frac{14}{9}$$

Studio il grafico $D: x \neq 0$ funzione pari

Non ha zeri; e^- sempre positiva

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{0^+} = +\infty \quad x=0 \text{ as. verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^2} = \frac{2}{+\infty} = 0^+ \quad y=0 \text{ as. orizzontale}$$

Passa per i punti A e B : si può anche disegnare.

4) $A(-1; 2)$ Determina la tangente t a $g(x)$ in A

$$g'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 2 \cdot 2x}{x^4} = \frac{-4x}{x^4} = -\frac{4}{x^3}$$

$$g'(-1) = -\frac{4}{(-1)^3} = 4$$

$$g(-1) = \frac{2}{(-1)^2} = 2 \text{ (già noto)}$$

$$t: y - 2 = 4(x + 1)$$

$$y = 4x + 4 + 2$$

$$y = 4x + 6$$

5) Determina l'eq. della parabola avente asse di simmetria $x=0$ e tangente t a t in A

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} = 0 \\ 2 = a + b + c \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 0 \\ c = 2 - a \end{cases}$$

$$y = ax^2 + 2 - a$$

$$y' = 2ax$$

$$\text{tangente } t \text{ in } A \Rightarrow m = f'(x) = 4 \quad 2a(-1) = 4 \Rightarrow a = -2$$

$$y = -2x^2 + 4$$