n. 47 $\quad y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1}$

$D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$

funzione pari perché rapporto di funzioni pari

$f(-x) = \dfrac{(-x)^2-4}{(-x)^2-1} = \dfrac{x^2-4}{x^2-1} = f(x)$

zeri

$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x^2-4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = \pm 2 \end{cases} \quad A(-2; 0) \quad B(2; 0)$

$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \quad C(0; 4)$

segno

$y \geq 0 \quad N \geq 0 \quad x^2-4 \geq 0 \quad x < -2 \vee x > 2$

$D > 0 \quad x^2-1 > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$

	-2	-1	1	2	
N	+	−	−	−	+
D	+	+	−	+	+
N/D	⊕	−	⊕	−	⊕

I.P.: $x \leq -2 \vee -1 < x < 1 \vee x \geq 2$

limiti e asintoti

Il grado del numeratore e del denominatore è lo stesso, quindi la funzione ha un asintoto orizzontale e non può avere asintoti obliqui.

Il denominatore si annulla in $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$, quindi si hanno due asintoti verticali di equazione $x = -1$ e $x = 1$.

$\lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2-4}{x^2-1} \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to \pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 1 \Rightarrow y = 1$ asintoto orizzontale dx e sx.

intersezioni con l'asintoto orizzontale

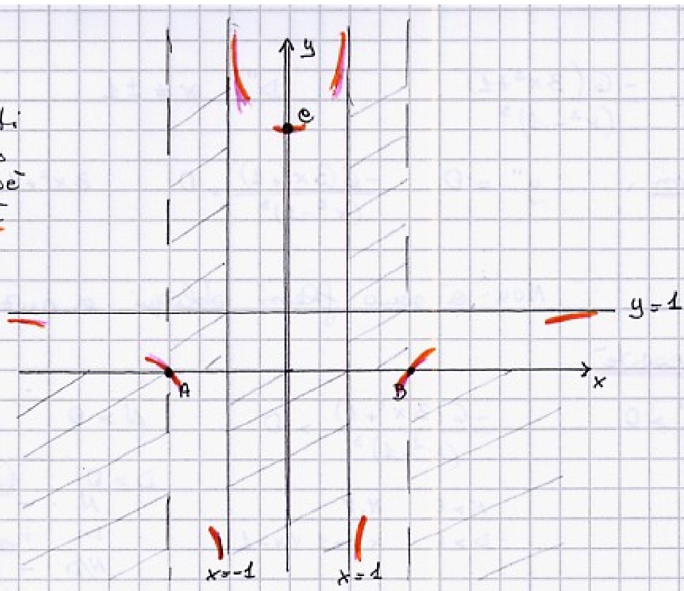
$\begin{cases} y = 1 \\ y = \dfrac{x^2-4}{x^2-1} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \dfrac{x^2-4}{x^2-1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \dfrac{\cancel{x^2}-4-\cancel{x^2}+1}{x^2-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \dfrac{-3}{x^2-1} = 0 \end{cases}$ impossibile

$\lim_{x \to -1^-} \dfrac{x^2-4}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-3}{-2 \cdot 0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \to -1^+} \dfrac{x^2-4}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-3}{-2 \cdot 0^+} = +\infty$

$\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x^2-4}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-3}{0^- \cdot 2} = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} \dfrac{x^2-4}{(x-1)(x+1)} = \dfrac{-3}{0^+ \cdot 2} = -\infty$

Grafico probabile

Gli elementi calcolati finora confermano quanto previsto, cioè che la funzione è pari ed ha 3 asintoti.



Studio della derivata prima

$$y' = \frac{2x(x^2-1) - (x^2-4)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{\cancel{2x^3} - 2x - \cancel{2x^3} + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

$D' : \; x \neq \pm 1$

punti stazionari (max, min, flessi orizzontali)

$$y' = 0 \qquad \frac{6x}{(x^2-1)^2} = 0 \qquad x = 0$$

monotonia della funzione (crescente, decrescente)

$$y' > 0 \qquad \frac{6x}{(x^2-1)^2} > 0 \qquad \begin{array}{ll} N>0 & x>0 \\ D>0 & x \neq \pm 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad y'>0 \text{ per } x>0$$

Tabella di monotonia

D		-1		0		1	
$f'(x)$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	Q	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$

Q punto di minimo stazionario relativo

$y_Q = 4 \qquad Q \equiv C \qquad Q(0;4)$

tangente orizzontale di eq. $y = 4$.

Non ci sono flessi in $x=-1$ e $x=1$ perché la funzione $f(x)$ non è continua in tali punti.

Studio della derivata seconda

$$y'' = \frac{6(x^2-1)^2 - 6x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(x^2-1) - 24x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-18x^2-6}{(x^2-1)^3}$$

$$y'' = \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \qquad D'': \ x \neq \pm 1$$

flessi $\quad y'' = 0 \quad \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} = 0 \quad 3x^2+1=0$ impossibile perché somma di termini positivi.

Non ci sono flessi obliqui e orizzontali.

concavità

$y'' > 0 \qquad \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} > 0$

$N > 0 \quad$ M.V

$D > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$

		-1		1	
N	$-$		$-$		$-$
D	$+$	0	$-$	0	$+$
N/D	$-$	$\nexists$	$\oplus$	$\nexists$	$-$

Tabella di concavità

D		-1		1	
$f''(x)$	$-$	$\nexists$	$+$	$\nexists$	$-$
$f(x)$	$\cap$	$\nexists$	$\cup$	$\nexists$	$\cap$

Non ci sono flessi nei punti di cambio concavità perché in tali punti la funzione non è continua.

Grafico certo

$$y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$$