

u. 48

$$y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

$$D = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$$

funzione pari perché rapporto di funzioni pari

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 4}{(-x)^2 - 1} = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = f(x)$$

zeri

$$\begin{cases} y = 0 \\ \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = \pm 2 \end{cases} \quad A(-2; 0) \quad B(2; 0)$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \quad C(0; 4)$$

segno

$$y \geq 0 \quad N \geq 0 \quad x^2 - 4 \geq 0 \quad x < -2 \vee x > 2$$

$$D > 0 \quad x^2 - 1 > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$$

	-2	-1	1	2
N	+	-	-	+
D	+	+	+	+
N/D	⊕	-	⊕	⊕

$$IP: x \leq -2 \vee -1 < x < 1 \vee x > 2$$

limiti e asintoti

Il grado del numeratore e del denominatore è lo stesso, quindi la funzione ha un asintoto orizzontale e non può avere asintoti obliqui.

Il denominatore si annulla in $x_0 = -1$ e $x_0 = 1$, quindi si hanno due asintoti verticali di equazione $x = -1$ e $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}{x^2(1 - \frac{1}{x^2})} = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ asintoto orizzontale di } x \text{ e } -x.$$

intersezioni con l'asintoto orizzontale

$$\begin{cases} y = 1 \\ y = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \frac{x^2 - 4}{x^2 - 1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x^2 - 4 - x^2 + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \frac{-3}{x^2 - 1} = 0 \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{-2 \cdot 0^-} = -\infty$$

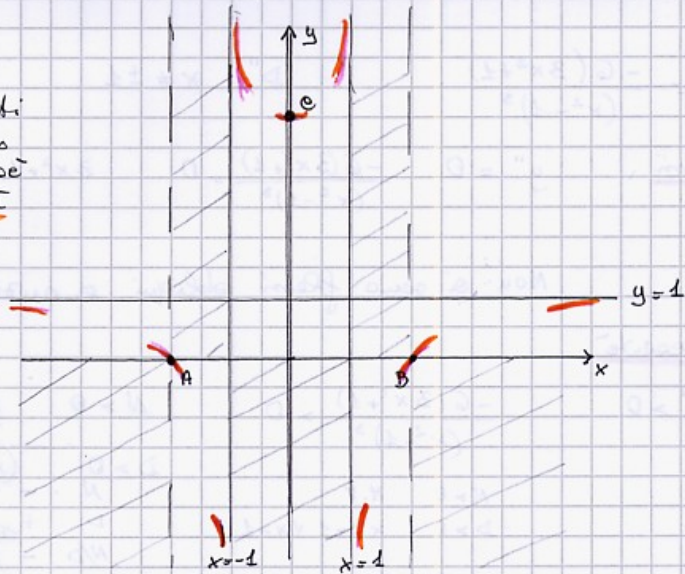
$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{-2 \cdot 0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{0^- \cdot 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4}{(x-1)(x+1)} = \frac{-3}{0^+ \cdot 2} = -\infty$$

Gruppo parabola

Gli elementi calcolati finora confermano quanto previsto, cioè che la funzione è pari ed ha 3 asintoti.



Studio della derivata prima

$$y' = \frac{2x(x^2-1) - (x^2-4)(2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 8x}{(x^2-1)^2} = \frac{6x}{(x^2-1)^2}$$

$D' : x \neq \pm 1$

punti stazionari (max, min, flessi orizzontali)

$y' = 0 \quad \frac{6x}{(x^2-1)^2} = 0 \quad x = 0$

monotonia della funzione (crescente, decrescente)

$y' > 0 \quad \frac{6x}{(x^2-1)^2} > 0 \quad N > 0 \quad x > 0 \Rightarrow y' > 0 \text{ per } x > 0$
 $D > 0 \quad x \neq \pm 1$

Tabella di monotonia

D	$-\frac{1}{0}$	0	$\frac{1}{0}$
$f(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\searrow

Q punto di minimo stazionario relativo

$y_Q = 4 \quad Q \equiv C \quad Q(0; 4)$

tangente orizzontale di eq. $y = 4$.

Non ci sono flessi in $x = -1$ $x = 1$ perché la funzione $f(x)$ non è continua in tali punti.

Studio della derivata seconda

$$y'' = \frac{6(x^2-1)^2 - 6x \cdot 2(x^2-1)2x}{(x^2-1)^4} = \frac{6(x^2-1) - 24x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-18x^2 - 6}{(x^2-1)^3}$$

$$y'' = \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} \quad D'': x \neq \pm 1$$

flessi $y'' = 0 \quad \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} = 0 \quad 3x^2+1=0$ impossibile perché somma di termini positivi.

Non ci sono flessi obliqui e orizzontali.

concavità

$$y'' > 0 \quad \frac{-6(3x^2+1)}{(x^2-1)^3} > 0$$

$$N > 0 \quad N.V. \\ D > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$$

	-1		1		
N	-	-	-	-	
D	+	0	-	0	+
N/D	-	⊗	⊗	-	

Tabella di concavità

D		-1		1	
$f''(x)$	-	⊗	+	⊗	-
$f(x)$	∩	⊗	∪	⊗	∩

Non ci sono flessi nei punti di cambio concavità perché in tali punti la funzione non è continua.

Grafico certo

$$y = \frac{x^2-4}{x^2-1}$$

