

PROBLEMA 1

È data la funzione di equazione: $f(x) = \frac{kx^2 - 1}{x^3}$.

- Determinare i valori di k per cui la funzione ammette punti di massimo e minimo relativi.
- Scrivere il luogo dei punti estremanti e rappresentarlo graficamente.
- Individuare il valore di k per il quale la funzione ha, nel suo punto di ascissa $x=1$, tangente appartenente al fascio $y=2x+q$ e scrivere l'equazione di tale tangente.
- Studiare e rappresentare la funzione γ individuata al punto c.
- Indicare con A ed F i punti di ascissa positiva in cui la funzione γ determinata ha, rispettivamente, ordinata nulla e un flesso: calcolare l'area S della parte di piano limitata dalla curva e dalla retta AF.

SOLUZIONE

a) $f(x) = \frac{kx^2 - 1}{x^3}$ Dominio $x \neq 0$

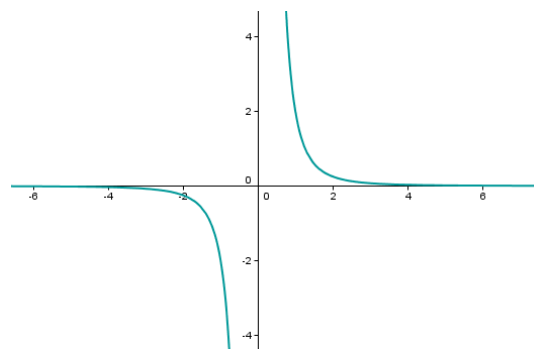
$$f'(x) = \frac{2kx \cdot x^3 - (kx^2 - 1)3x^2}{x^6} = \frac{-kx^2 + 3}{x^4}$$

$$f'(x) = 0 \quad -kx^2 + 3 = 0 \quad x^2 = \frac{3}{k} \quad \text{Le ascisse dei punti estremanti sono } x = \pm \sqrt{\frac{3}{k}}$$

Ed esistono solo per $k > 0$

b) Il luogo degli estremanti in forma cartesiana è:

$$\begin{cases} x^2 = \frac{3}{k} \\ y = \frac{kx^2 - 1}{x^3} \end{cases} \quad \begin{cases} k = \frac{3}{x^2} \\ y = \frac{\cancel{3}x^{\cancel{2}} - 1}{x^3} = \frac{2}{x^3} \end{cases} \quad y = \frac{2}{x^3}$$



Dominio $x \neq 0$. È dispari, infatti $f(-x) = \frac{2}{(-x)^3} = -\frac{2}{x^3} = -f(x)$

Non ha zeri, è positiva per $x > 0$. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{x^3} = 0^\pm$ $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2}{x^3} = \pm\infty$

c) $y = 2x + q$ $m = 2$

$$f'(x) = \frac{-kx^2 + 3}{x^4} \quad \begin{cases} f'(1) = -k + 3 \\ f'(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow 3 - k = 2 \quad k = 1 \quad \rightarrow \quad f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$$

$f(1) = 0$, il punto di tangenza ha coordinate $P(1; 0)$, la tangente ha equazione $y = 2x - 2$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^3}$ è una funzione dispari, il dominio è $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$$\text{zeri} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{x^2 - 1}{x^3} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \quad A(-1; 0) \quad B(1; 0) \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \quad C(0; -1)$$

segno $y > 0$ $-1 < x < 0 \vee x > 1$

$$\text{limiti} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2-1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2}{3x} = 0^\pm \qquad \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{x^2-1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2}{3x} = \pm\infty$$

avendo applicato la regola di de L'Hôpital alle forme indeterminate $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ e $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Studio della derivata prima $f'(x) = \frac{-x^2+3}{x^4}$

Dominio $x \neq 0$, $f'(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{3}$, assume segno positivo nell'intervallo tra le radici.

La tabella di monotonìa è:

$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	→
-	0	+	+
↘	↗	↗	↘

Il minimo $N\left(-\sqrt{3}; -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$; Il massimo $M\left(\sqrt{3}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

Studio della derivata seconda $f''(x) = \frac{-2x \cdot x^4 - (-x^2+3) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{2x^2-12}{x^5}$

Dominio $x \neq 0$, $f''(x) = 0$ per $x = \pm\sqrt{6}$, assume segno positivo per $-\sqrt{6} < x < 0 \vee x > \sqrt{6}$.

La tabella di concavità è:

$-\sqrt{6}$	0	$\sqrt{6}$	→
-	0	+	-
∩	∪	∩	∪

Il flesso $F_1\left(-\sqrt{6}; -\frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$;

è un flesso obliquo ascendente;

la tangente inflessionale ha

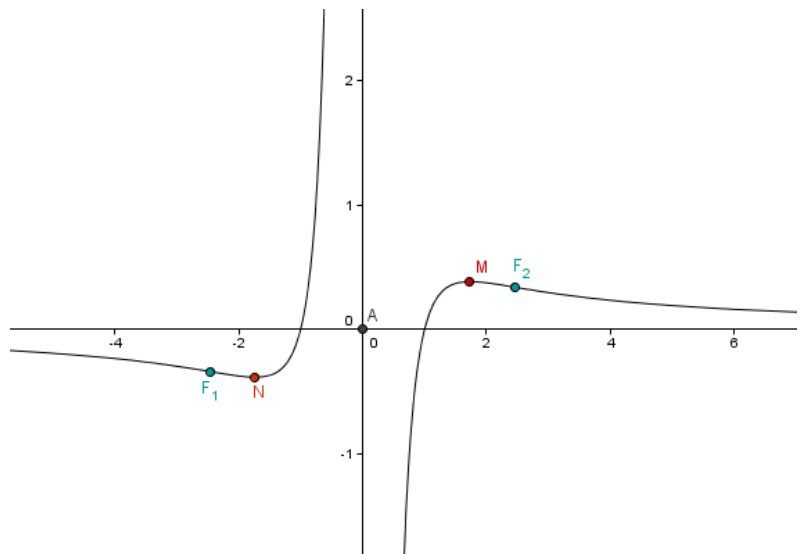
coefficiente angolare $m = f'(-\sqrt{6}) = -\frac{1}{12}$

Il flesso $F_2\left(\sqrt{6}; \frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$;

è un flesso obliquo discendente;

la tangente inflessionale ha

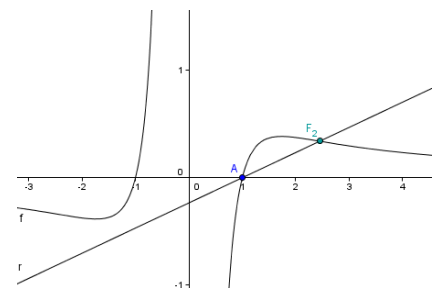
coefficiente angolare $m = f'(\sqrt{6}) = -\frac{1}{12}$



e) $A(1;0)$ $F_2\left(\sqrt{6}; \frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$ La retta AF_2 ha equazione $y = \frac{\sqrt{6}+1}{6\sqrt{6}}(x-1)$

$$\int_1^{\sqrt{6}} \left(\frac{x^2-1}{x^3} - \frac{\sqrt{6}+1}{6\sqrt{6}}(x-1) \right) dx = \int_1^{\sqrt{6}} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{\sqrt{6}+1}{6\sqrt{6}}(x-1) \right) dx =$$

$$= \left[\ln|x| + \frac{1}{2x^2} - \frac{\sqrt{6}+1}{6\sqrt{6}} \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right]_1^{\sqrt{6}} = \ln\sqrt{6} + \frac{5\sqrt{6}}{12} - \frac{35}{12}$$



PROBLEMA 2

Considerare la funzione $f(x) = |x| + \sqrt[3]{x}$.

- Studiare l'andamento di $y = f(x)$ e tracciarne il grafico.
- Analizzare i punti in cui la funzione è continua ma non derivabile.
- Dopo aver enunciato il teorema di Lagrange per le funzioni reali di una variabile reale, provare che nell'intervallo $[0; 1]$ vale il suddetto teorema e calcolare l'ascissa del punto di contatto tra la curva e la tangente di cui tratta il teorema.
- Calcolare l'integrale definito $I = \int_{-1}^1 f(x)dx$ e spiegare perché esso non rappresenta la misura dell'area compresa tra la curva, l'asse delle x e le rette $x = -1$ e $x = 1$.
- Calcolare, infine, la misura dell'area della regione di piano descritta dal punto d.

SOLUZIONE

È una funzione definita per casi. Sciogliendo il modulo si ha:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} & \text{per } x \geq 0 \\ -x + \sqrt[3]{x} & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad \text{Dominio} = \mathbb{R} \quad \text{né pari, né dispari}$$

zeri

$$\text{per } x \geq 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ x + \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{per } x < 0 \quad \begin{cases} y = 0 \\ -x + \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 = (\sqrt[3]{x})^3 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

segno

per $x \geq 0$ si ha sempre $y \geq 0$

$$\text{per } x < 0 \text{ pongo } -x + \sqrt[3]{x} > 0 \quad x^3 - x < 0 \quad x(x^2 - 1) < 0 \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad -1 \quad 0} \\ x \quad - \quad - \\ x^2 - 1 \quad + \quad - \\ x(x^2 - 1) \quad - \quad + \end{array}$$

I.P. $x < -1 \vee x > 0$

Limiti

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + \sqrt[3]{x}) = +\infty$ ci potrebbe essere l'asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-x + \sqrt[3]{x})}{x} = -1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + \sqrt[3]{x}) + x = -\infty \Rightarrow \text{non c'è l'asintoto obliquo}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt[3]{x}) = +\infty$ come sopra, anche in questo caso non c'è l'asintoto obliquo.

Derivata prima

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{per } x > 0 \\ -1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{per } x < 0 \end{cases} \quad \text{Dominio } x \neq 0, \text{ la funzione non è derivabile in } x=0$$

Classifico il punto di non derivabilità:

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f'(x) = +\infty \Rightarrow \text{in } x=0 \text{ la funzione ha un flesso a tangente verticale}$$

Punti stazionari: $f'(x) = 0$

$$1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \quad \text{M.V.}$$

$$-1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = 0 \quad \text{per } x = \frac{-1}{\sqrt[3]{27}} \text{ punto stazionario di minimo}$$

$$\text{Infatti } f'(x) > 0 \quad -1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0 \text{ per } x > \frac{-1}{\sqrt[3]{27}} \quad \text{e} \quad 1 + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} > 0 \quad \text{S.V.}$$

come riepilogato nella tabella di monotonia

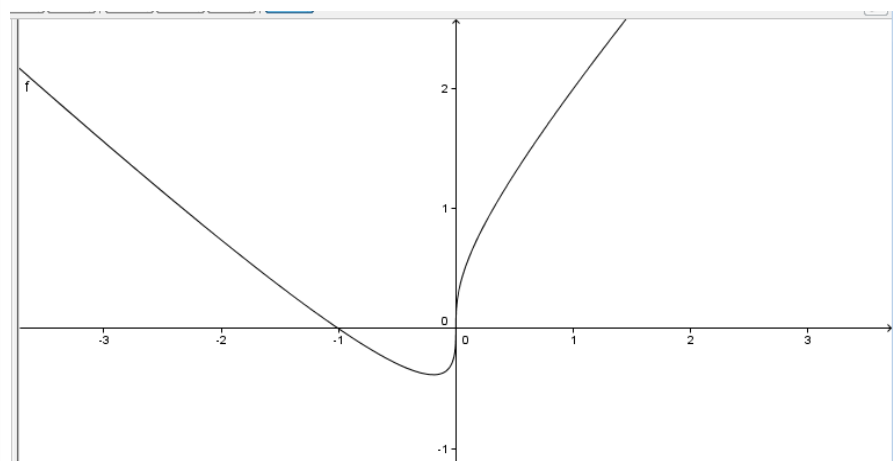
	$-\frac{1}{27}$	0	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	\nearrow	\nearrow

Derivata seconda $f''(x) = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ per $x \neq 0$.

Il segno della derivata seconda è positivo per $x < 0$ e negativo per $x > 0$;

	0
+	\searrow
-	\nearrow

Il grafico è :



Soluzione non completa (il resto nella prossima puntata, domani pomeriggio)

QUESTIONARIO

- 1) Determinare l'equazione della parabola P , con asse parallelo all'asse delle ordinate, sapendo che:
- essa è tangente alla retta $y = x$ nel punto di ascissa 1;
 - l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di P , dall'asse delle ascisse, dall'asse delle ordinate e dalla retta $x = 1$ misura $\frac{5}{6}$.

SOLUZIONE

$$y = ax^2 + bx + c \quad f'(x) = 2ax + b$$

La tangente nel punto di ascissa 1 ha coefficiente angolare $m = f'(1) = 1$, quindi $2a + b = 1$.

Il punto appartiene alla retta, quindi ha coordinate (1,1) e appartiene alla parabola, quindi $a + b + c = 1$.

Calcolo l'integrale definito per ottenere la terza condizione:

$$\int_0^1 (ax^2 + bx + c) dx = \left[a \frac{x^3}{3} + b \frac{x^2}{2} + cx \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \quad \text{quindi} \quad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{5}{6}$$

Le tre condizioni da imporre sono:

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b + c = 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{5}{6} \end{cases} \quad \text{che risolto dà} \quad \begin{cases} b = -1 \\ c = 1 \\ a = 1 \end{cases} \quad y = x^2 - x + 1$$

- 2) Dopo aver dimostrato che $f(x) = \ln(x+1) + \arctg x$ è invertibile nel suo campo di esistenza, determina il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = f^{-1}(x)$ nel suo punto $O(0; 0)$, avendo indicato con $f^{-1}(x)$ la funzione inversa di $f(x)$.

SOLUZIONE

Il dominio della funzione è limitato ai valori positivi dell'argomento del logaritmo; quindi è $x > -1$.

Se dimostro che $f(x)$ è monotona, avrò una funzione biiettiva e, quindi, invertibile.

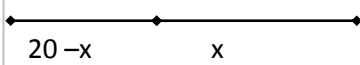
$$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1} \quad \text{La derivata prima è sempre positiva nel CE, quindi la funzione è strettamente crescente e invertibile.}$$

Calcolo la derivata della sua funzione inversa:

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1+x+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+2}$$

Il coefficiente angolare della tangente in $O(0;0)$ è, quindi, $\frac{1}{2}$ e la tangente richiesta è $y = \frac{1}{2}x$.

- 3) Un cavo lungo 20 cm viene tagliato in due parti. Una delle due parti, lunga x , viene piegata a forma di circonferenza, l'altra a forma di quadrato. Stabilire per quale valore di x la somma delle due aree è minima.

SOLUZIONE

Per la circonferenza, $2\pi r = x \rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$.

Per il quadrato, il lato è $l = \frac{20-x}{4}$

La funzione da rendere minima è $f(x) = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\frac{20-x}{4}\right)^2$ e semplificando $f(x) = \frac{x^2}{4\pi} + \left(5 - \frac{x}{4}\right)^2$

La derivata prima $f'(x) = \frac{x}{2\pi} + 2\left(5 - \frac{x}{4}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{x}{2\pi} - \frac{5}{2} + \frac{x}{8} = x\left(\frac{4+\pi}{8\pi}\right) - \frac{5}{2}$

$f'(x) = 0 \quad x\left(\frac{4+\pi}{8\pi}\right) = \frac{5}{2} \quad x = \frac{20\pi}{4+\pi}$

- 4) In Italia, a partire dal 1994, viene rivoluzionato il sistema di numerazione delle targhe automobilistiche: scompare la sigla della provincia e la targa si compone di una combinazione di due lettere, tre cifre e altre due lettere (Esempio: AX 700 ZZ). Le lettere utilizzabili sono quelle dell'alfabeto inglese ad esclusione di I, O, Q e U.



Si calcoli quante targhe automobilistiche diverse si ottengono con questo sistema.

SOLUZIONE

Si tratta di disposizioni con ripetizione di 22 lettere su 4 posti e di 10 cifre su 3 posti.

$D'_{22,4} \cdot D'_{10,3} = 22^4 \cdot 10^3 = 234\,256\,000$ targhe diverse.

- 5) Ad un cilindro equilatero, avente raggio di base unitario, si circoscriva il cono circolare retto, con base complanare a quella del cilindro e il cui volume è minimo.

SOLUZIONE

Il cilindro è equilatero quindi $h=2r$. Il raggio è unitario quindi $r=1$ e $h=2$. Il cono è retto quindi la proiezione ortogonale del suo vertice cade nel centro della base del cilindro. In figura è rappresentata la sezione piana del solido ottenuta con un piano passante per l'asse del cilindro. Si osserva che i triangoli ABC e AFD sono simili per il 1° criterio di similitudine, avendo i tre angoli ordinatamente uguali, come angoli corrispondenti di rette parallele tagliate dalle trasversali AB e AC.

Posto $AF=x$, con $x>0$, si ha:

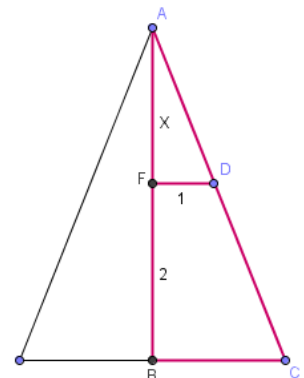
altezza del cono $\overline{AB} = 2+x$

Per determinare il raggio BC di base del cono in funzione di x :

$\overline{BC} : \overline{FD} = \overline{AB} : \overline{AF}$

$\overline{BC} : 1 = (2+x) : x \quad \overline{BC} = \frac{2+x}{x}$

Il volume del cono: $f(x) = \frac{1}{3} \pi \overline{BC}^2 \cdot \overline{AB} = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{2+x}{x}\right)^2 (2+x) = \frac{1}{3} \pi \frac{(2+x)^3}{x^2}$

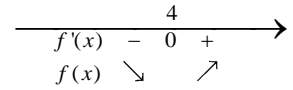


$f'(x) = \frac{1}{3}\pi \frac{3(2+x)^2 x^2 - (2+x)^3 2x}{x^4}$ raccogliendo e semplificando si ottiene:

$$f'(x) = \frac{1}{3}\pi \frac{\cancel{x}^2 (2+x)^2 (3x - (2+x)2)}{x^{\cancel{4}^3}} = \frac{1}{3}\pi \frac{(2+x)^2 (3x - 4 - 2x)}{x^3} = \frac{1}{3}\pi \frac{(2+x)^2 (x-4)}{x^3}$$

la derivata prima si annulla per $x=-2$, non accettabile, e per $x=4$, accettabile.

Risulta positiva a destra di 4 e negativa alla sua sinistra, quindi $x=4$ è l'ascissa del



minimo. L'ordinata del minimo, cioè il volume del cono, vale $V_{cono} = \frac{9}{2}\pi$

6) Si dica perché non è possibile calcolare il limite seguente con la regola di de l'Hôpital e si applichi la regola opportuna per calcolarlo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \text{sen}x}{3x+1}$

SOLUZIONE

La funzione seno è una funzione oscillante, quindi il limite del seno per $x \rightarrow \infty$ non esiste per il teorema della permanenza del segno. Quindi il limite richiesto non è una forma indeterminata prevista dal teorema di de l'Hôpital.

Tuttavia il limite si può determinare applicando il teorema del confronto:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \text{sen}x}{3x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x} \left(1 + \frac{\text{sen}x}{x}\right)}{\cancel{x} \left(3 + \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{3} \quad \text{infatti} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{ed anche} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0$$

In particolare dimostro che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}x}{x} = 0$. La funzione seno è limitata $-1 \leq \text{sen}x \leq 1$. Nell'intorno di $+\infty$ i valori

di x sono positivi, quindi divido tutta la disuguaglianza per x mantenendone i segni $-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen}x}{x} \leq \frac{1}{x}$

La funzione minorante $-\frac{1}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$. Anche la funzione maggiorante $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$.

Quindi per il teorema del confronto anche $\frac{\text{sen}x}{x} \rightarrow 0$ per $x \rightarrow +\infty$

7) La funzione definita da $q = e^{2t} \cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$ descrive il passaggio della carica elettrica q nella sezione di un conduttore al variare del tempo t . Considerare la funzione data nell'intervallo $]0; \pi[$ e determinare il valore massimo dell'intensità di corrente i in tale intervallo.

SOLUZIONE

La corrente è la derivata prima della $q(t)$. $i(t) = q'(t) = 2e^{2t} \left(\cos\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) \right)$. Per determinare

il massimo di $i(t)$ occorre calcolarne la derivata. $\frac{di}{dt} = 8e^{2t} \text{sen}\left(2t - \frac{\pi}{2}\right)$ Ponendola uguale a zero si ha

l'equazione $8e^{2t}\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ che si riduce a $\sin\left(2t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ e che ammette come soluzioni

$2t - \frac{\pi}{2} = 0 \vee 2t - \frac{\pi}{2} = \pi$ e quindi $t = \frac{\pi}{4} \vee t = \frac{3}{4}\pi$. Il primo valore corrisponde al massimo che vale

$i_{\max} = 2e^{\frac{\pi}{2}}$. Il secondo valore è il minimo della corrente e vale $i_{\min} = -2e^{\frac{3}{2}\pi}$, come si ottiene facilmente sostituendo i valori di t trovati nell'espressione della $i(t)$.

8) Calcolare il valore del seguente integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 - \sin x} dx$.

SOLUZIONE

Calcolo prima l'integrale indefinito $\int \cos x \sqrt{1 - \sin x} dx = -\frac{(1 - \sin x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = -\frac{2}{3} \sqrt{(1 - \sin x)^3} + c$

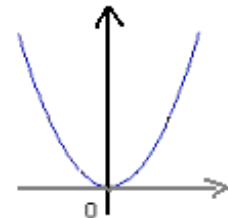
avendo applicato la regola $\int f'(x) \cdot [f(x)]^\alpha dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$

L'integrale definito vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 - \sin x} dx = \left[-\frac{2}{3} \sqrt{(1 - \sin x)^3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}$

9) Il grafico in figura 1 rappresenta l'andamento della derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$.

Si considerino le seguenti affermazioni relative alla funzione $f(x)$:

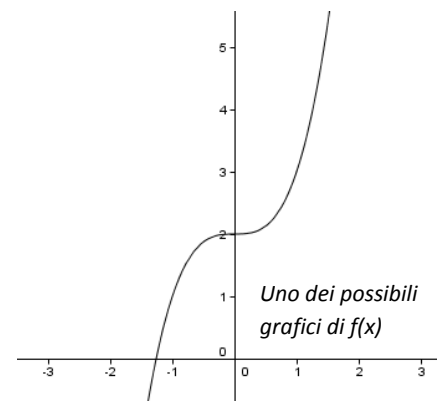
- (a) che è monotona crescente
- (b) che ammette un minimo relativo
- (c) che ammette un massimo relativo
- (d) che non ammette flessi.



Dire se ogni affermazione è corretta o meno, giustificando adeguatamente la risposta.

SOLUZIONE

- (a) Vera, infatti la derivata prima risulta mai negativa $f'(x) \geq 0$ in tutto il dominio.
- (b) Falso, ha un punto stazionario nell'origine degli assi ma la $f'(x)$ non cambia segno nel suo intorno, quindi è un flesso a tangente orizzontale.
- (c) Falso, come nel punto (b).
- (d) Falso, condizione necessaria per l'esistenza di un flesso è che la derivata prima sia nulla e questo si verifica in $x=0$, quindi il flesso c'è.



Anche se non richiesto, conviene disegnare il grafico di una delle possibili primitive, fissando a piacere la costante di integrazione.

10) Per quali valori di k il grafico di $y = \frac{7x-13}{x^2-2(k-1)x+2k}$ presenta due asintoti paralleli all'asse y ?

Per quale valore di k i due valori distano $\frac{1}{2}$?

SOLUZIONE

Gli asintoti richiesti sono verticali di equazione $x = x_1$ e $x = x_2$. x_1 e x_2 devono essere radici distinte del denominatore quindi si chiede che il denominatore $x^2 - 2(k-1)x + 2k = 0$ abbia $\Delta > 0$.

$$\frac{\Delta}{4} = (k-1)^2 - 2k = k^2 - 4k + 1 \quad k^2 - 4k + 1 > 0 \quad k < 2 - \sqrt{3} \vee k > 2 + \sqrt{3}$$

Le radici sono $x_1 = k - 1 - \sqrt{k^2 - 4k + 1}$ e $x_2 = k - 1 + \sqrt{k^2 - 4k + 1}$

La distanza è la lunghezza di un segmento parallelo all'asse x , quindi:

$$|x_2 - x_1| = \left| k - 1 + \sqrt{k^2 - 4k + 1} - \left(k - 1 - \sqrt{k^2 - 4k + 1} \right) \right| = 2\sqrt{k^2 - 4k + 1}$$

$$2\sqrt{k^2 - 4k + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 4k + 1 \geq 0 \\ k^2 - 4k + 1 = \frac{1}{16} \end{cases} \quad \begin{cases} k < 2 - \sqrt{3} \vee k > 2 + \sqrt{3} \\ k = \frac{32 \pm \sqrt{32^2 - 15 \cdot 16}}{16} = \frac{32 \pm 28}{16} \end{cases} \quad k_1 = \frac{1}{4} \vee k_2 = \frac{15}{4}$$

entrambi valori accettabili.

THE END