PROBLEMA 1

È data la funzione di equazione: $f(x)=\dfrac{kx^2-1}{x^3}$.

a) Determinare i valori di k per cui la funzione ammette punti di massimo e minimo relativi.
b) Scrivere il luogo dei punti estremanti e rappresentarlo graficamente.
c) Individuare il valore di k per il quale la funzione ha, nel suo punto di ascissa $x=1$, tangente appartenente al fascio $y=2x+q$ e scrivere l'equazione di tale tangente.
d) Studiare e rappresentare la funzione γ individuata al punto c.
e) Indicare con A ed F i punti di ascissa positiva in cui la funzione γ determinata ha, rispettivamente, ordinata nulla e un flesso: calcolare l'area S della parte di piano limitata dalla curva e dalla retta AF.

SOLUZIONE

a) $f(x)=\dfrac{kx^2-1}{x^3}$ Dominio $x\neq 0$

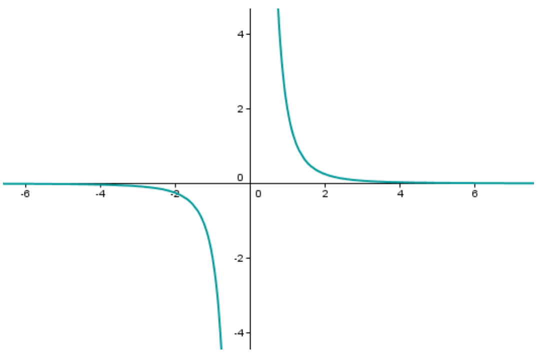
$$f'(x)=\frac{2kx\cdot x^3-(kx^2-1)3x^2}{x^6}=\frac{-kx^2+3}{x^4}$$

$f'(x)=0$ $\quad -kx^2+3=0 \quad x^2=\dfrac{3}{k}$ Le ascisse dei punti estremanti sono $x=\pm\sqrt{\dfrac{3}{k}}$

Ed esistono solo per $k>0$

b) Il luogo degli estremanti in forma cartesiana è:

$$\begin{cases} x^2=\dfrac{3}{k} \\ y=\dfrac{kx^2-1}{x^3}\end{cases} \qquad \begin{cases} k=\dfrac{3}{x^2} \\ y=\dfrac{\dfrac{3}{\cancel{x^2}}\cancel{x^2}-1}{x^3}=\dfrac{2}{x^3}\end{cases} \qquad y=\frac{2}{x^3}$$



Dominio $x\neq 0$. È dispari, infatti $f(-x)=\dfrac{2}{(-x)^3}=-\dfrac{2}{x^3}=-f(x)$

Non ha zeri, è positiva per $x>0$. $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^3}=0^{\pm}$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{2}{x^3}=\pm\infty$

c) $y=2x+q \quad m=2$

$$f'(x)=\frac{-kx^2+3}{x^4} \qquad \begin{cases} f'(1)=-k+3 \\ f'(1)=2\end{cases} \Rightarrow 3-k=2 \quad k=1 \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$$

$f(1)=0$, il punto di tangenza ha coordinate $P(1;0)$, la tangente ha equazione $y=2x-2$

d) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^3}$ è una funzione dispari, il dominio è $D=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$

<u>zeri</u> $\begin{cases} y=0 \\ y=\dfrac{x^2-1}{x^3}\end{cases} \quad \begin{cases} y=0 \\ x=\pm 1\end{cases} \quad A(-1;0) \quad B(1;0) \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=-1\end{cases} \quad C(0;-1)$

<u>segno</u> $y>0 \quad -1<x<0 \ \vee \ x>1$

<u>limiti</u> $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{3x}=0^{\pm}$ $\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{x^2-1}{x^3}=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{2\cancel{x}}{3x^{\cancel{2}}}=\lim_{x\to 0^{\pm}}\frac{2}{3x}=\pm\infty$

avendo applicato la regola di de L'Hôpital alle forme indeterminate $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ e $\left[\frac{0}{0}\right]$.

<u>Studio della derivata prima</u> $f'(x)=\frac{-x^2+3}{x^4}$

Dominio $x\neq 0$, $f'(x)=0$ per $x=\pm\sqrt{3}$, assume segno positivo nell'intervallo tra le radici.

La tabella di monotonia è:

$$\begin{array}{ccccccccc} & -\sqrt{3} & & 0 & & \sqrt{3} & & \\ - & 0 & + & \nexists & + & 0 & - \\ \searrow & & \nearrow & & \nearrow & & \searrow \end{array}$$

Il minimo $N\left(-\sqrt{3};-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$; Il massimo $M\left(\sqrt{3};\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$.

<u>Studio della derivata seconda</u> $f''(x)=\frac{-2x\cdot x^4-(-x^2+3)\cdot 4x^3}{x^8}=\frac{2x^2-12}{x^5}$

Dominio $x\neq 0$, $f''(x)=0$ per $x=\pm\sqrt{6}$, assume segno positivo per $-\sqrt{6}<x<0 \vee x>\sqrt{6}$.

La tabella di concavità è:

$$\begin{array}{ccccccccc} & -\sqrt{6} & & 0 & & \sqrt{6} & & \\ - & 0 & + & \nexists & - & 0 & + \\ \cap & & \cup & & \cap & & \cup \end{array}$$

Il flesso $F_1\left(-\sqrt{6};-\frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$;

è un flesso obliquo ascendente;

la tangente inflessionale ha

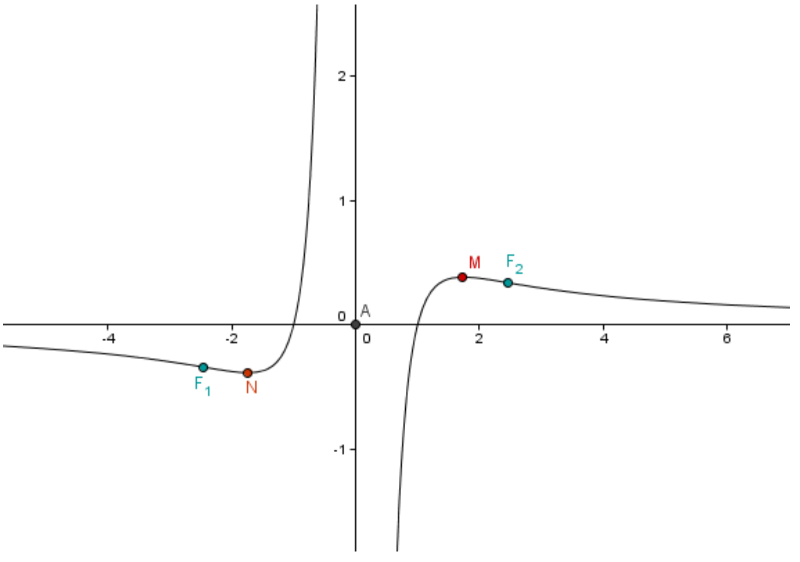
coefficiente angolare $m=f'(-\sqrt{6})=-\frac{1}{12}$

Il flesso $F_2\left(\sqrt{6};\frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$;

è un flesso obliquo discendente;

la tangente inflessionale ha

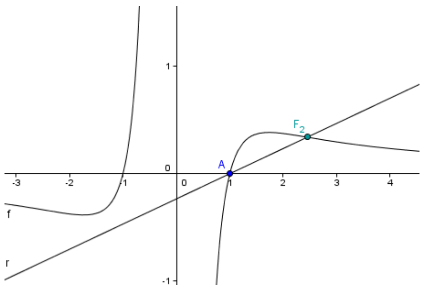
coefficiente angolare $m=f'(\sqrt{6})=-\frac{1}{12}$



e) $A(1;0)$ $F_2\left(\sqrt{6};\frac{5}{6\sqrt{6}}\right)$ La retta AF_2 ha equazione $y=\frac{\sqrt{6}+1}{6\sqrt{6}}(x-1)$

$$\int_1^{\sqrt{6}}\left(\frac{x^2-1}{x^3}-\frac{\sqrt{6}+1}{6\sqrt{6}}(x-1)\right)dx=\int_1^{\sqrt{6}}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}-\frac{\sqrt{6}+1}{6\sqrt{6}}(x-1)\right)dx=$$

$$=\left[\ln|x|+\frac{1}{2x^2}-\frac{\sqrt{6}+1}{6\sqrt{6}}\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right]_1^{\sqrt{6}}=\ln\sqrt{6}+\frac{5\sqrt{6}}{12}-\frac{35}{12}$$



PROBLEMA 2

Considerare la funzione $f(x) = |x| + \sqrt[3]{x}$.

a) Studiare l'andamento di $y = f(x)$ e tracciarne il grafico.

b) Analizzare i punti in cui la funzione è continua ma non derivabile.

c) Dopo aver enunciato il teorema di Lagrange per le funzioni reali di una variabile reale, provare che nell'intervallo $[0;\ 1]$ vale il suddetto teorema e calcolare l'ascissa del punto di contatto tra la curva e la tangente di cui tratta il teorema.

d) Calcolare l'integrale definito $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx$ e spiegare perché esso non rappresenta la misura dell'area compresa tra la curva, l'asse delle x e le rette $x = -1$ e $x = 1$.

e) Calcolare, infine, la misura dell'area della regione di piano descritta dal punto d.

SOLUZIONE

È una funzione definita per casi. Sciogliendo il modulo si ha:

$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt[3]{x} & \text{per } x \geq 0 \\ -x + \sqrt[3]{x} & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

Dominio = R

né pari, né dispari

zeri

$$\text{per} \quad x \geq 0 \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x + \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{per} \quad x < 0 \qquad \begin{cases} y = 0 \\ -x + \sqrt[3]{x} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x^3 = \left(\sqrt[3]{x}\right)^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ x = -1 \end{cases}$$

segno

$$\text{per} \quad x \geq 0 \quad \text{si ha} \quad \text{sempre} \ \ y \geq 0$$

$$\text{per} \quad x < 0 \quad \text{pongo} \quad -x + \sqrt[3]{x} > 0 \qquad x^3 - x < 0 \quad x(x^2 - 1) < 0$$

		-1		0
x	$-$		$-$	
x^2-1	$+$		$-$	
$x(x^2-1)$	$-$		$+$	

I.P. $x < -1 \quad \vee \quad x > 0$

Limiti

$\lim_{x\to-\infty} (-x + \sqrt[3]{x}) = +\infty$ ci potrebbe essere l'asintoto obliquo

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-x + \sqrt[3]{x})}{x} = -1$$

$$q = \lim_{x\to-\infty} (-x + \sqrt[3]{x}) + x = -\infty \quad \Rightarrow$$ non c'è l'asintoto obliquo

$\lim_{x\to+\infty} (x + \sqrt[3]{x}) = +\infty$ come sopra, anche in questo caso non c'è l'asintoto obliquo.

Derivata prima

$$f'(x)=\begin{cases}1+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{per } x>0\\[2ex] -1+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} & \text{per } x<0\end{cases}$$

Dominio $x\neq 0$, la funzione non è derivabile in x=0

Classifico il punto di non derivabilità:

$\lim\limits_{x\to 0\pm} f'(x)=+\infty \;\Rightarrow$ in x=0 la funzione ha un flesso a tangente verticale

Punti stazionari: $f'(x)=0$

$$1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0 \quad \text{M.V.}$$

$$-1+\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=0 \quad \text{per } x=\frac{-1}{\sqrt{27}}$$ punto stazionario di minimo

Infatti $f'(x)>0$ $-1+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$ per $x>\dfrac{-1}{\sqrt{27}}$ e $1+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}>0$ S.V.

come riepilogato nella tabella di monotonia

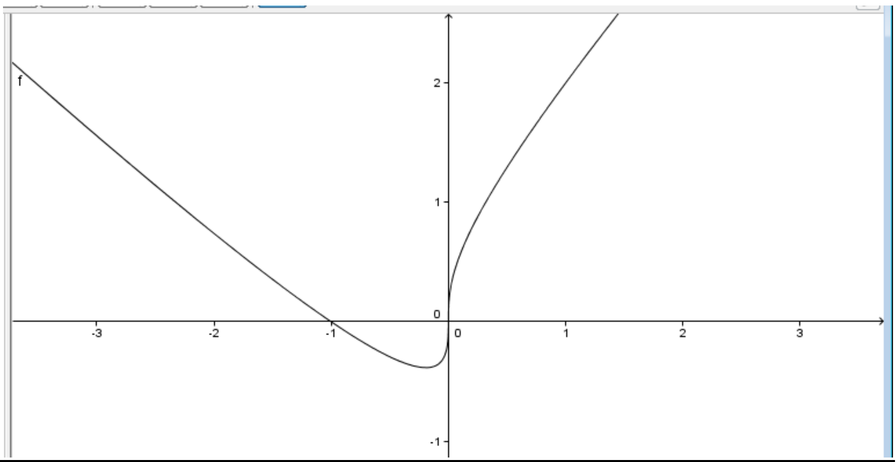
		$-\frac{1}{27}$		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$
$f(x)$	↘		↗		↗

Derivata seconda $f''(x)=-\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}$ per $x\neq 0$.

Il segno della derivata seconda è positivo per x<0 e negativo per x>0;

	0	
$+$	$\nexists$	$-$
$\cup$		$\cap$

Il grafico è :



Soluzione non completa (il resto nella prossima puntata, domani pomeriggio)

QUESTIONARIO

1) Determinare l'equazione della parabola *P*, con asse parallelo all'asse delle ordinate, sapendo che:

   a) essa è tangente alla retta $y = x$ nel punto di ascissa 1;
   b) l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico di *P*, dall'asse delle ascisse, dall'asse delle ordinate e dalla retta $x = 1$ misura $\frac{5}{6}$.

SOLUZIONE

$y = ax^2 + bx + c \qquad f'(x) = 2ax + b$

La tangente nel punto di ascissa 1 ha coefficiente angolare $m = f'(1) = 1$, quindi $2a + b = 1$.

Il punto appartiene alla retta, quindi ha coordinate (1,1) e appartiene alla parabola, quindi $a + b + c = 1$.

Calcolo l'integrale definito per ottenere la terza condizione:

$$\int_0^1 (ax^2 + bx + c)dx = \left[a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx \right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c \qquad \text{quindi} \qquad \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{5}{6}$$

Le tre condizioni da imporre sono: $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b + c = 1 \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = \frac{5}{6} \end{cases}$ che risolto dà $\begin{cases} b = -1 \\ c = 1 \\ a = 1 \end{cases} \qquad y = x^2 - x + 1$

2) Dopo aver dimostrato che $f(x) = \ln(x+1) + \text{arctg}x$ è invertibile nel suo campo di esistenza, determina il coefficiente angolare della retta tangente alla curva $y = f^{-1}(x)$ nel suo punto $O(0;\ 0)$, avendo indicato con $f^{-1}(x)$ la funzione inversa di $f(x)$.

SOLUZIONE

Il dominio della funzione è limitato ai valori positivi dell'argomento del logaritmo; quindi è x > -1.

Se dimostro che f(x) è monotona , avrò una funzione biiettiva e, quindi, invertibile.

$f'(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}$ La derivata prima è sempre positiva nel CE, quindi la funzione è strettamente crescente e invertibile.

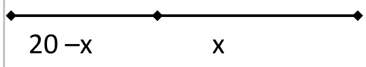
Calcolo la derivata della sua funzione inversa:

$$Df^{-1}(x) = \frac{1}{Df(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2+1}} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+1+x+1} = \frac{(x+1)(x^2+1)}{x^2+x+2}$$

Il coefficiente angolare della tangente in O(0;0) è, quindi, $\frac{1}{2}$ e la tangente richiesta è $y = \frac{1}{2}x$.

3) Un cavo lungo 20 cm viene tagliato in due parti. Una delle due parti, lunga x, viene piegata a forma di circonferenza, l'altra a forma di quadrato. Stabilire per quale valore di x la somma delle due aree è minima.

SOLUZIONE



Per la circonferenza, $2\pi r = x \quad \rightarrow \quad r = \dfrac{x}{2\pi}$.

Per il quadrato, il lato è $\quad l = \dfrac{20-x}{4}$

La funzione da rendere minima è $f(x) = \pi\left(\dfrac{x}{2\pi}\right)^2 + \left(\dfrac{20-x}{4}\right)^2$ e semplificando $f(x) = \dfrac{x^2}{4\pi} + \left(5 - \dfrac{x}{4}\right)^2$

La derivata prima $f'(x) = \dfrac{x}{2\pi} + 2\left(5 - \dfrac{x}{4}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{x}{2\pi} - \dfrac{5}{2} + \dfrac{x}{8} = x\left(\dfrac{4+\pi}{8\pi}\right) - \dfrac{5}{2}$

$f'(x) = 0 \qquad x\left(\dfrac{4+\pi}{8\pi}\right) = \dfrac{5}{2} \qquad x = \dfrac{20\pi}{4+\pi}$

4) In Italia, a partire dal 1994, viene rivoluzionato il sistema di numerazione delle targhe automobilistiche: scompare la sigla della provincia e la targa si compone di una combinazione di due lettere, tre cifre e altre due lettere (Esempio: AX 700 ZZ). Le lettere utilizzabili sono quelle dell'alfabeto inglese ad esclusione di I, O, Q e U.

Si calcoli quante targhe automobilistiche diverse si ottengono con questo sistema.

SOLUZIONE

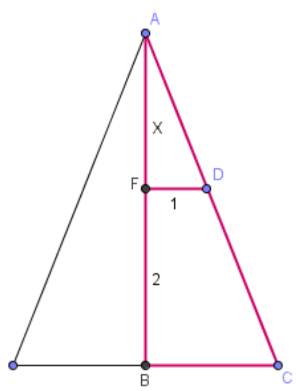
Si tratta di disposizioni con ripetizione di 22 lettere su 4 posti e di 10 cfre su 3 posti.

$D'_{22,4} \cdot D'_{10,3} = 22^4 \cdot 10^3 = 234\ 256\ 000$ targhe diverse.

5) Ad un cilindro equilatero, avente raggio di base unitario, si circoscriva il cono circolare retto, con base complanare a quella del cilindro e il cui volume è minimo.

SOLUZIONE

Il cilindro è equilatero quindi h=2r. Il raggio è unitario quindi r=1 e h=2. Il cono è retto quindi la proiezione ortogonale del suo vertice cade nel centro della base del cilindro. In figura è rappresentata la sezione piana del solido ottenuta con un piano passante per l'asse del cilindro. Si osserva che i triangoli ABC e AFD sono simili per il 1° criterio di similitudine, avendo i tre angoli ordinatamente uguali, come angoli corrispondenti di rette parallele tagliate dalle trasversali AB e AC.



Posto AF=x, con x>0, si ha:

altezza del cono $\overline{AB} = 2 + x$

Per determinare il raggio BC di base del cono in funzione di x:

$\overline{BC} : \overline{FD} = \overline{AB} : \overline{AF}$

$\overline{BC} : 1 = (2+x) : x \qquad \overline{BC} = \dfrac{2+x}{x}$

Il volume del cono: $f(x) = \dfrac{1}{3}\pi\overline{BC}^2 \cdot \overline{AB} = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{2+x}{x}\right)^2(2+x) = \dfrac{1}{3}\pi\dfrac{(2+x)^3}{x^2}$

$f'(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{3(2+x)^2x^2-(2+x)^3 2x}{x^4}$ raccogliendo e semplificando si ottiene:

$$f'(x)=\frac{1}{3}\pi\frac{\cancel{x}(2+x)^2(3x-(2+x)2)}{x^{\cancel{4}3}}=\frac{1}{3}\pi\frac{(2+x)^2(3x-4-2x)}{x^3}=\frac{1}{3}\pi\frac{(2+x)^2(x-4)}{x^3}$$

la derivata prima si annulla per x=-2 , non accettabile, e per x=4, accettabile.
Risulta positiva a destra di 4 e negativa alla sua sinistra, quindi x=4 è l'ascissa del minimo. L'ordinata del minimo, cioè il volume del cono, vale $V_{cono}=\frac{9}{2}\pi$

		4	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

6) Si dica perché non è possibile calcolare il limite seguente con la regola di de l'Hôpital e si applichi la regola opportuna per calcolarlo: $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\text{sen}x}{3x+1}$

SOLUZIONE

La funzione seno è una funzione oscillante, quindi il limite del seno per $x\to\infty$ non esiste per il teorema della permanenza del segno. Quindi il limite richiesto non è una forma indeterminata prevista dal teorema di de l'Hôpital.

Tuttavia il limite si può determinare applicando il teorema del confronto:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\text{sen}x}{3x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\frac{\text{sen}x}{x}\right)}{\cancel{x}\left(3+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{3}$$ infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ed anche $\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}x}{x}=0$

In particolare dimostro che $\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{sen}x}{x}=0$. La funzione seno è limitata $-1\le\text{sen}x\le1$. Nell'intorno di $+\infty$ I valori di x sono positivi, quindi divido tutta la diseguaglianza per x mantenendone i segni $\frac{-1}{x}\le\frac{\text{sen}x}{x}\le\frac{1}{x}$

La funzione minorante $\frac{-1}{x}\to0\quad\text{per}\quad x\to+\infty$. Anche la funzione maggiorante $\frac{1}{x}\to0\quad\text{per}\quad x\to+\infty$.

Quindi per il teorema del confronto anche $\frac{\text{sen}x}{x}\to0\quad\text{per}\quad x\to+\infty$

7) La funzione definita da $q=e^{2t}\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$ descrive il passaggio della carica elettrica q nella sezione di un conduttore al variare del tempo t. Considerare la funzione data nell'intervallo $]0;\ \pi[$ e determinare il valore massimo dell'intensità di corrente i in tale intervallo.

SOLUZIONE

La corrente è la derivata prima della $q(t)$. $i(t)=q'(t)=2e^{2t}\left(\cos\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)-\text{sen}\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. Per determinare il massimo di $i(t)$ occorre calcolarne la derivata. $\frac{di}{dt}=8e^{2t}\text{sen}\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)$ Ponendola uguale a zero si ha l'equazione $8e^{2t}\operatorname{sen}\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)=0$ che si riduce a $\operatorname{sen}\left(2t-\frac{\pi}{2}\right)=0$ e che ammette come soluzioni $2t-\frac{\pi}{2}=0 \;\vee\; 2t-\frac{\pi}{2}=\pi$ e quindi $t=\frac{\pi}{4} \;\vee\; t=\frac{3}{4}\pi$. Il primo valore corrisponde al massimo che vale $i_{\max}=2e^{\frac{\pi}{2}}$. Il secondo valore è il minimo della corrente e vale $i_{\min}=-2e^{\frac{3}{2}\pi}$, come si ottiene facilmente sostituendo i valori di t trovati nell'espressione della $i(t)$.

8) Calcolare il valore del seguente integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1-senx}\,dx$.

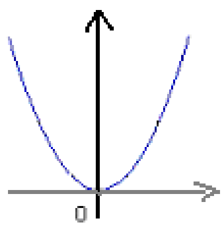
SOLUZIONE

Calcolo prima l'integrale indefinito $\int \cos x\sqrt{1-\operatorname{sen}x}\,dx=-\frac{(1-\operatorname{sen}x)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}=-\frac{2}{3}\sqrt{(1-\operatorname{sen}x)^3}+c$

avendo applicato la regola $\int f'(x)\cdot[f(x)]^{\alpha}\,dx=\frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$

L'integrale definito vale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1-senx}\,dx=\left[-\frac{2}{3}\sqrt{(1-\operatorname{sen}x)^3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$

9) Il grafico in figura 1 rappresenta l'andamento della derivata prima $f'(x)$ di una funzione $f(x)$.
Si considerino le seguenti affermazioni relative alla funzione $f(x)$:

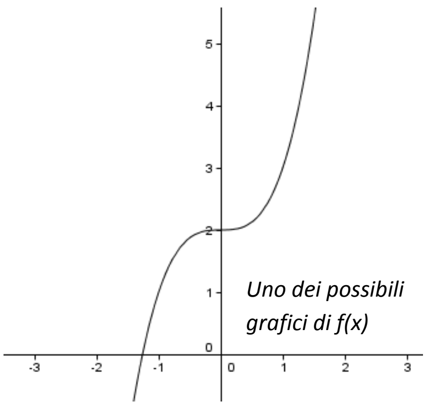


(a) che è monotona crescente
(b) che ammette un minimo relativo
(c) che ammette un massimo relativo
(d) che non ammette flessi.

Dire se ogni affermazione è corretta o meno, giustificando adeguatamente la risposta.

SOLUZIONE

(a) Vera, infatti la derivata prima risulta mai negativa $f'(x)\geq 0$ in tutto il dominio.
(b) Falso, ha un punto stazionario nell'origine degli assi ma la f'(x) non cambia segno nel suo intorno, quindi è un flesso a tangente orizzontale.
(c) Falso, come nel punto (b).
(d) Falso, condizione necessaria per l'esistenza di un flesso è che la derivata prima sia nulla e questo si verifica in x=0, quindi il flesso c'è.



Anche se non richiesto, conviene disegnare il grafico di una delle possibili primitive, fissando a piacere la costante di integrazione.

10) Per quali valori di k il grafico di $y=\dfrac{7x-13}{x^2-2(k-1)x+2k}$ presenta due asintoti paralleli all'asse y?

Per quale valore di k i due valori distano $\dfrac{1}{2}$?

SOLUZIONE

Gli asintoti richiesti sono verticali di equazione $x=x_1$ e $x=x_2$. x_1 e x_2 devono essere radici distinte del denominatore quindi si chiede che il denominatore $x^2-2(k-1)x+2k=0$ abbia $\Delta>0$.

$$\frac{\Delta}{4}=(k-1)^2-2k=k^2-4k+1 \qquad k^2-4k+1>0 \qquad k<2-\sqrt{3} \ \vee \ k>2+\sqrt{3}$$

Le radici sono $x_1=k-1-\sqrt{k^2-4k+1}$ e $x_2=k-1+\sqrt{k^2-4k+1}$

La distanza è la lunghezza di un segmento parallelo all'asse x, quindi:

$$|x_2-x_1|=\left|k-1+\sqrt{k^2-4k+1}-\left(k-1-\sqrt{k^2-4k+1}\right)\right|=2\sqrt{k^2-4k+1}$$

$$2\sqrt{k^2-4k+1}=\frac{1}{2} \iff \begin{cases} k^2-4k+1\geq 0 \\ k^2-4k+1=\dfrac{1}{16}\end{cases} \qquad \begin{cases} k<2-\sqrt{3} \ \vee \ k>2+\sqrt{3} \\ k=\dfrac{32\pm\sqrt{32^2-15\cdot 16}}{16}=\dfrac{32\pm 28}{16}\end{cases} \qquad k_1=\frac{1}{4} \ \vee \ k_2=\frac{15}{4}$$

entrambi valori accettabili.

THE END