PROBLEMA 1

Si consideri la parabola di equazione $y = x^2 - 2x$ e la retta *r*: $y = mx$; siano *M* ed *O* le loro intersezioni ed *N* la proiezione di *M* sull'asse *x*.

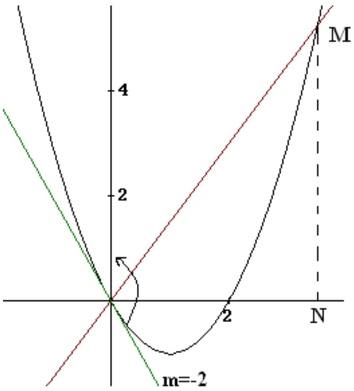


Grafico della parabola $y = x^2 - 2x$

Asse di simmetria $-\dfrac{b}{2a} = 1$ vertice V(1,-1)

Intersezioni con gli assi

a) Trovare la retta *t* tangente alla parabola nell'origine

$y' = 2x - 2$ $f'(0) = -2$, dunque $m = -2$ e la tangente ha equazione $y = -2x$

b) Determinare le limitazioni geometriche su m affinché la retta r intersechi la parabola nel 1° o nel 4° quadrante, *cioè* affinché il punto *M* si trovi nel primo o nel quarto quadrante;

Le rette che intersecano in tali quadranti sono quelle comprese fra la tangente e l'asse y dunque quelle che hanno $m \geq -2$

c) Determinare il rapporto $f(m) = \dfrac{\overline{MO}}{\overline{MN}}$;

determino le coordinate parametriche di M sapendo che appartiene alla parabola e alla retta r

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = m.x \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - (2+m)x = 0 \\ -- \end{cases} \qquad O\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad M\begin{cases} x = 2+m \\ y = 2m + m^2 \end{cases}$$

$M(2+m, 2m+m^2)$ quindi la proiezione N di M sull'asse x ha coordinate $N(2+m, 0)$

$$\overline{MO} = \sqrt{(2+m)^2 + (2m+m^2)^2} = \sqrt{(2+m)^2(1+m^2)} = |2+m|\sqrt{1+m^2} \qquad f(x) = \frac{|2+m|\sqrt{1+m^2}}{|2m+m^2|}$$

$$\overline{MN} = |2m+m^2|$$

d) Calcolare il limite a cui tende $f(m)$ al tendere di *r* all'asse y e al tendere di r alla tangente in O

se r tende all'asse *y* vuol dire che *m* tende a $+\infty$

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{|2+m|\sqrt{1+m^2}}{|2m+m^2|} = \lim_{m\to+\infty} \frac{|2+m|\sqrt{1+m^2}}{|2+m||m|} = \lim_{m\to+\infty} \frac{|m|\sqrt{1+\frac{1}{m^2}}}{|m|} = 1$$

se *r* tende alla tangente in *O allora m tende a -2*

$$\lim_{x\to-2} \frac{|2+m|\sqrt{1+m^2}}{|2+m|\cdot|m|} = \lim_{x\to-2} \frac{\sqrt{1+m^2}}{|m|} = \frac{\sqrt{5}}{2};$$

e) Classificare le discontinuità della funzione $y = f(m)$.

Per studiare il dominio di *f(m)* pongo $|2m+m^2| \neq 0$ trovando $D = (-\infty,-2) \cup (-2,0) \cup (0,+\infty)$.

$$\lim_{x\to-2} \frac{|2+m|\sqrt{1+m^2}}{|2+m|\cdot|m|} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$ dunque $x = -2$ è una discontinuità di 3° specie;

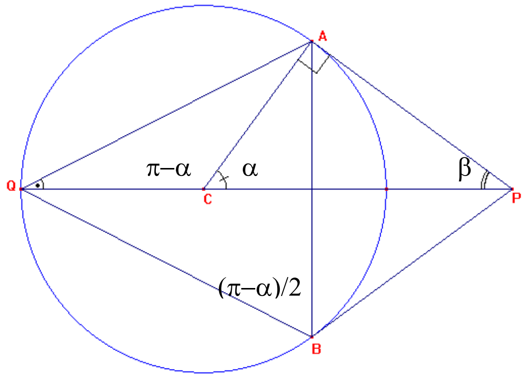
$$\lim_{x\to0} \frac{|2+m|\sqrt{1+m^2}}{|2+m|\cdot|m|} = \frac{2}{0} = +\infty$$ dunque $x = 0$ è una discontinuità di 2° specie.

PROBLEMA 2

E' assegnata una circonferenza di centro C e raggio unitario. Si conducano da un punto P esterno alla circonferenza le rette ad essa tangenti, chiamare A e B i punti di tangenza e Q l'estremo del diametro sulla retta PQ esterno al segmento CP.

a) Esprimere in funzione di $\overline{CP} = x$ le funzioni goniometriche degli angoli e le misure dei lati del triangolo ACP

$$\overline{AC} = 1 \qquad \overline{CP} = x \qquad \overline{AP} = \sqrt{x^2 - 1}$$



$$sen\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

$$sen\alpha = cos\beta$$

$$cos\alpha = sen\alpha$$

$$cos\alpha = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{1}{x}$$

b) Trovare la misura del segmento AQ e la funzione $f(x) = \frac{1}{\overline{AP}^2} + \frac{1}{\overline{AQ}^2}$

Considero la corda AQ che sottende un angolo al centro $\pi - \alpha$ quindi un angolo alla circonferenza $\frac{\pi - \alpha}{2}$

$$\overline{AQ} = 2r sen(\frac{\pi - \alpha}{2}) = 2 sen(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}) = 2 cos\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = 2\sqrt{\frac{1+1/x}{2}} = 2\sqrt{\frac{1+x}{2x}}$$

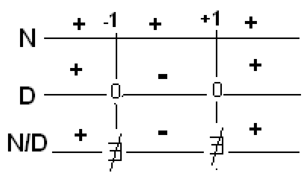
$$f(x) = \frac{1}{\overline{AP}^2} + \frac{1}{\overline{AQ}^2} = \frac{1}{x^2-1} + \frac{2x}{4(x+1)} = \frac{2 + x(x-1)}{2(x^2-1)} = \frac{x^2 - x + 2}{2(x^2-1)}$$

c) costruire il grafico probabile

DOMINIO pongo $x^2 - 1 \neq 0 \quad D = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

SEGNO $x^2 - x + 2 \geq 0 \quad \Delta < 0 \Rightarrow \forall x$

$(x^2 - 1) > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > +1$



INTERSEZIONI E ZERI $\begin{cases} y = \frac{x^2 - x + 2}{2(x^2-1)} \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

Non esistono intersezioni con l'asse x

LIMITI

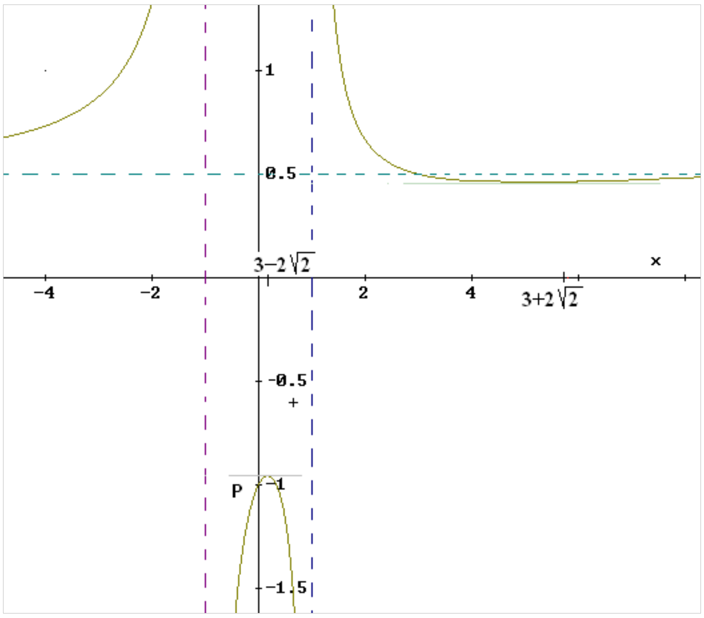
$$\lim_{x \to -1^\pm} \frac{x^2 - x + 2}{2(x^2-1)} = \lim_{x \to -1^\pm} \frac{x^2 - x + 2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{4}{2(-2)\cdot 0^\pm} = \mp\infty$$ dunque $x = -1$ è asintoto verticale

$$\lim_{x \to 1^\pm} \frac{x^2 - x + 2}{2(x^2-1)} = \lim_{x \to 1^\pm} \frac{x^2 - x + 2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{4}{2(0^\pm)\cdot 2} = \pm\infty$$ dunque $x = -1$ è asintoto verticale

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2(x^2-1)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$ dunque $y = \frac{1}{2}$ è asintoto orizzontale

INTERSEZIONI CON L'ASINTOTO ORIZZONTALE

$$\begin{cases} y = \frac{x^2 - x + 2}{2(x^2-1)} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases} \qquad B\begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x = 3 \end{cases}$$



d) Trovare la tangente nel punto di intersezione con l'asse y e i punti della curva aventi tangente orizzontale.

Calcolo la derivata della funzione

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{(x^2-1)(2x-1)-(x^2-x+2)(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{1}{2}\frac{x^2-6x+1}{(x^2-1)^2}$$

per trovare la tangente in P(0;-1) sostituisco x=0: $f'(0)=\dfrac{0-0+1}{2(0-1)^2}=\dfrac{1}{2}=m$ quindi l'equazione è $y=\dfrac{1}{2}x-1$

per trovare i punti a tangente orizzontale, cioè in cui la tangente ha $m=0$, pongo $f'(x)=0$ $\dfrac{x^2-6x+1}{2(x^2-1)^2}=0$

trovando $x=3\pm2\sqrt{2}$ e sostituendo nella curva $y=\dfrac{-1\pm2\sqrt{2}}{4}$

e) Posto infine $\overline{CP}=\dfrac{5}{3}$ determinare l'ampiezza degli angoli del triangolo QAB.

$\overline{CP}=\dfrac{5}{3}$ $\overline{AP}=\sqrt{\left(\dfrac{5}{3}\right)^2-1}=\dfrac{4}{3}$

$$sen\alpha=cos\beta=\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{5}=\frac{4}{5}$$

$$cos\alpha=sen\beta=\frac{1}{\overline{CP}}=\frac{3}{5}$$

$A\hat{Q}B=\dfrac{1}{2}A\hat{C}B=\alpha$ per proprietà angoli al centro e alla circonferenza, dunque $A\hat{Q}B=arcsen\dfrac{4}{5}=53{,}13°$

$$\overline{AQ}=2\sqrt{\frac{(x+1)}{2x}}=2\sqrt{\frac{\left(\frac{5}{3}+1\right)}{2\cdot\frac{5}{3}}}=2\sqrt{\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{10}}=2\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$$

Dunque per teorema della corda $senA\hat{B}Q=\dfrac{\overline{AQ}}{2r}=\dfrac{4}{\sqrt{5}}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ cioè $A\hat{B}Q=arsen\dfrac{2}{\sqrt{5}}=63{,}43°$.