QUESITI

1. Un corpo di massa 3 *kg* si muove su una retta con legge oraria $s(t)=\frac{1}{25}t^3+3t^2-21t+4$. Dimostrare che la sua energia cinetica nell'istante *t = 5* secondi è 216 *J*.

$$v(t)=s'(t)=\frac{3}{25}t^2+6t-21$$

$$v(5)=\frac{3}{25}25+6\cdot 5-21=12\frac{m}{s}$$

$$E_C=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\cdot 3kg\cdot\left(12\frac{m}{s}\right)^2=216J$$

2. Determinare quanto vale il seguente limite al variare del parametro *a*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-1)x^3+(a+1)x^2-2x}{x^2-3x}$$

pongo (a^2-1)=0 cioè a=±1 e studio i due casi separatamente:

se $a=-1$ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{0\cdot x^3+0\cdot x^2-2x}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\frac{-2}{\infty}=0$$

se $a=+1$ $$\lim_{x\to+\infty}\frac{0\cdot x^3+2\cdot x^2-2x}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\frac{2}{1}=2$$

se $(a^2-1)>0\Rightarrow a<-1\vee a>+1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-1)\cdot x^3+2\cdot x^2-2x}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left((a^2-1)+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(a^2-1)}{x^2}=+\infty$$

se $(a^2-1)<0\Rightarrow -1<a<+1$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a^2-1)\cdot x^3+2\cdot x^2-2x}{x^2-3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left((a^2-1)+\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}=-\infty$$

3. Dopo aver definito le varie specie di discontinuità di una funzione, studiare le singolarità di

$$y=\frac{x^2-x-6}{x^3-4x}$$

<u>Definizioni</u>

$x=x_0$ è una <u>discontinuità di 1ª specie</u> se non esiste f(x_0), esistono i limiti a destra e a sinistra di x_0, sono finiti ma diversi tra loro.

$x=x_0$ è una <u>discontinuità di 2ª specie</u> se non esiste f(x_0) e, considerando i limiti a destra e a sinistra di x_0, almeno uno di essi non esiste o è infinito.

$x=x_0$ è una <u>discontinuità di 3ª specie</u> se non esiste f(x_0) e i limiti a destra e a sinistra di x_0 esistono, sono finiti ed uguali fra loro; tale discontinuità è eliminabile ridefinendo opportunamente la funzione.

Per studiare le discontinuità trovo il dominio ponendo $x^3-4x\neq 0$ quindi $x\neq 0\wedge x\neq\pm 2$. Classifico la discontinuità che ho in questi punti:

$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x-6}{x^3-4x}=\frac{-6}{0}=\pm\infty$ dunque $x=0$ è una discontinuità di 2° specie

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-6}{x^3-4x}=\frac{-4}{0}=\pm\infty$ dunque $x=2$ è una discontinuità di 2° specie

$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^3-4x}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)(x+2)}{x(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-3)}{x(x-2)}=\frac{-5}{-2(-4)}=-\frac{5}{8}$ dunque $x=-2$ è una discontinuità di 3° specie

4. Quale fra le seguenti funzioni verifica $\forall x,y\in R$ l'identità $f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=6xy-3y^2-2$?

a) $f(x)=2+x$ b) $f(x)=1+x$ c) $f(x)=1-x$ d) $f(x)=1+x^2$. Giustificare la risposta data.

Le funzioni a, b, c sono lineari in x ed anche le funzioni a 1° membro dell'espressione sono lineari in x e y, quindi non consentono di ottenere i termini di 2° grado che compaiono a 2° membro dell'espressione da trovare.
L'unica che può dare il risultato richiesto è l'ultima, unica funzione in cui compare un quadrato:

$f(x+y)=1+(x+y)^2$ $f(x-y)=1+(x-y)^2$ $f(y)=1+y^2$

dunque

$$f(x+y)-2f(x-y)+f(x)-2f(y)=1+(x+y)^2-2(1+(x-y)^2)+1+x^2-2(1+y^2)=$$
$$=6xy-3y^2-2$$

5. Dopo aver dato la definizione di funzione continua e di funzione derivabile in un punto, stabilire per quali valori di *a* e *b* la seguente funzione è continua e derivabile nel suo dominio

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot e^x & se \quad x\le 0 \\ -x^2+x+b & se \quad x>0 \end{cases}$$

Disegnare il grafico della funzione ottenuta.

Per studiare le continuità in $x=0$ (unico punto nel quale la funzione potrebbe non essere continua o derivabile) calcolo limite destro e sinistro della funzione:

$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} a\cdot e^x=a\cdot 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(-x^2+x+b\right)=b$

impongo la continuità, quindi *a=b*

Per studiare le derivabilità trovo $f'(x)=\begin{cases} a\cdot e^x & se \quad x<0 \\ -2x+1 & se \quad x>0 \end{cases}$

$f'_-(x)=\lim_{x\to 0^-} a\cdot e^x=a$

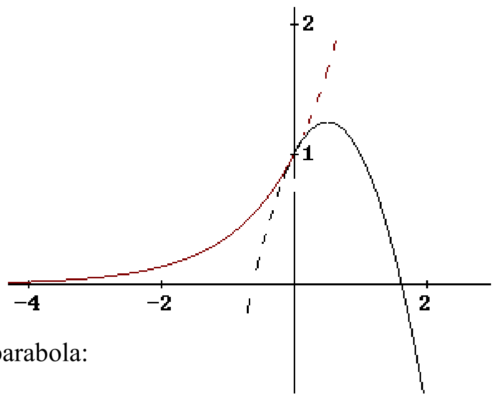
$f'_+(x)=\lim_{x\to 0^+}(-2x+1)=1$

per la derivabilita' impongo, quindi, *a=1*

risolvo il sistema sulle due condizioni imposte $\begin{cases} a=b \quad \Rightarrow \quad b=1 \\ a=1 \end{cases}$

Sostituendo nella funzione ottengo $f(x)=\begin{cases} e^x & se \quad x\le 0 \\ -x^2+x+1 & se \quad x>0 \end{cases}$

il cui grafico risulta dall'unione di grafico di una funzione esponenziale e di una parabola:



6. Determinare i valori da attribuire ai parametri *a* e *b* affinché la funzione così definita

$y=(3a+b-1)x^3-(2a-1)x^2+bx-a+b$ risulti dispari.

La definizione di funzione dispari $f(-x)=-f(x)$ ci dice che una funzione polinomiale può essere dispari solo se presenta solo monomi di grado dispari, quindi pongo uguali a zero i coefficienti dei monomi di grado pari:

$$\begin{cases} 2a-1=0 \quad \Rightarrow \quad a=\frac{1}{2} \\ -a+b=0 \qquad b=a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

7. Data la curva di equazione: $y=\frac{x^2-2ax-3b}{2x-4}$ determinare *a* e *b* in modo che la curva passi per il punto $A(4;1)$ e che nel punto di ascissa $x=0$ abbia la tangente parallela all'asse *x*. Trovare inoltre se esistono punti nei quali la tangente alla curva è parallela all'asintoto obliquo.

Perché la curva passi per il punto $A(4;1)$ sostituisco le coordinate nella equazione:

$$1=\frac{16-8a-3b}{8-4} \quad \Rightarrow \quad 4=16-8a-3b$$

Per imporre la condizione di tangenza calcolo la derivata

$$f'(x)=\frac{(2x-4)(2x-2a)-(x^2-2ax-3b)(2)}{(2x-4)^2}$$

$$f'(0)=\frac{(2\cdot 0-4)(2\cdot 0-2a)-(0-3b)(2)}{(2\cdot 0-4)^2}=\frac{8a+6b}{16} \quad \Rightarrow \quad 4a+3b=0$$

Metto a sistema le due condizioni

$$\begin{cases}4=16-8a-3b\\ 4a+3b=0\end{cases} \quad \begin{cases}a=3\\ b=-4\end{cases} \quad \text{cioè } y=\frac{x^2-6x+12}{2x-4} \quad \text{la cui derivata è}$$

$$f'(x)==\frac{(2x-4)(2x-6)-(x^2-6x+12)(2)}{(2x-4)^2}=\frac{x^2-4x+24}{(2x-4)^2}$$

Cerco il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-6x+12}{2x-4}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2}$ Pongo $m=f'(x)$ $\frac{x^2-4x+24}{(2x-4)^2}=\frac{1}{2} \Rightarrow x^2-4x+24=x^2-4x+4 \Rightarrow$ non esiste x, dunque non esistono punti con tangente // all'asintoto.

8. Dopo avere dato la definizione di derivata di una funzione applicarla per calcolare la derivata della funzione $f(x)=\ln(2x)$.

Calcolo il rapporto incrementale

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\ln[2(x+h)]-\ln[2x]}{h}=\frac{1}{h}\ln\frac{2(x+h)}{2x}=\frac{1}{h}\ln\frac{x+h}{x}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\ln\frac{(x+h)}{(x)}=\lim_{h\to 0}\ln\left(\frac{x+h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}=\ln\left[\lim_{h\to 0}\left(1+\frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}}\right]=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}$$

ricordando il limite notevole $\lim\limits_{h\to 0}\left[(1+h)^{\frac{1}{h}}\right]=e$

9. Enunciare il teorema del confronto e, data la funzione $f(x)=\frac{x+\cos x}{x^2}$, applicarlo per calcolare il $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

ip. $f(x), g(x), h(x)$ definite su dominio comune *ts*

$f(x)<g(x)<h(x) \quad \forall x\in I(x_0)$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\ell$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\ell$

La nostra funzione può essere scritta $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\cos x}{x^2}$. Sapendo che $-1\le\frac{\cos x}{x^2}\le 1$ ed essendo $x^2>0$ divido la disequazione per x^2 $-\frac{1}{x^2}\le\frac{\cos x}{x^2}\le\frac{1}{x^2}$. Poichè $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ allora anche $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x^2}=0$.

Inoltre $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, e dunque, per somma di limiti, *f(x)* ha limite 0.

10. Dimostrare che l'equazione $x\cdot 2^x=1$ ha almeno una radice positiva minore di 1.

Posso applicare il teorema di esistenza degli zeri alla funzione $f(x)=x\cdot 2^x-1$ che è continua in quanto somma di funzioni continue, nell'intervallo $[0,1]$. Devo verificare che assume segno opposto negli estremi dell'intervallo

$$f(0)=0\cdot 2^0-1<0$$

$$f(1)=1\cdot 2^1-1=2-1>0$$

Il teorema dunque assicura l'esistenza di almeno una radice dell'equazione.