QUESITO 1

Quali tra le seguenti espressioni sono prive di significato in **R**? Motiva la risposta.

a) $\operatorname{sen}\left(\ln e^{-2\pi}\right)$ b) $\ln(\cos(-4\pi))$ c) $\log_{\sqrt{1-x^2}}(x-1)$ d) $\sqrt{-\log_{\frac{1}{3}} 8}$ e) $\arcsin\left(x^2+2\right)$

Sono prive di significato in R le espressioni c) ed e); infatti:

per la c) le C.E. sono: $\begin{cases} \sqrt{1-x^2} \neq 1 \\ \sqrt{1-x^2} > 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \\ x-1>0 \end{cases}$ e il dominio è Ø

per la e) la C.E. è: $-1 \leq x^2+2 \leq 1$ $\quad -3 < x^2 < -1$ la disequazione $x^2 < -1$ è impossibile e il dominio è Ø.

Invece le altre hanno significato:

$sen\left(ln\, e^{-2\pi}\right) = sen(-2\pi) = 0$ $\qquad ln(cos(-4\pi)) = ln 1 = 0$ $\qquad -log_{\frac{1}{3}} 8 = log_3 8 > 0$

QUESITO 2

Una pallina si muove lungo una retta (asse y) seguendo la legge oraria $y(t) = 2\cos(\omega \cdot t + \varphi)$, dove t rappresenta il tempo (misurato in secondi) e ω e φ sono costanti, con $-\pi < \varphi < 0$ e $0 < \omega < \pi$.

a) Determinare il valore delle costanti ω e φ sapendo che all'istante $t = 0$ la pallina si trova in $y = 1$ e all'istante $t = 1$ si trova in $y = 2$.

b) Determinare gli intervalli nel primo periodo in cui la velocità è positiva.

a) ricavo il valore della fase iniziale φ sostituendo nella legge oraria la condizione iniziale assegnata nel punto a:

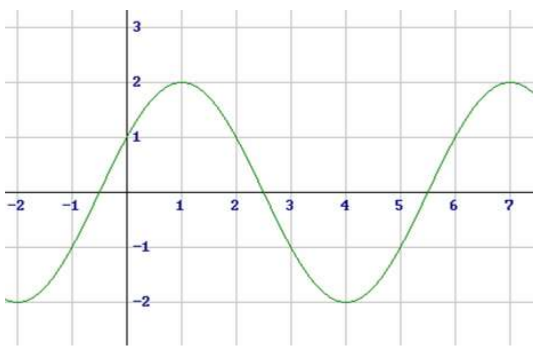
$$\begin{cases} t = 0 \\ y = 1 \\ y = 2\cos(\omega \cdot t + \varphi) \end{cases} \qquad 1 = 2\cos(\omega \cdot 0 + \varphi) \qquad \cos\varphi = \frac{1}{2} \qquad \varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

poiché la fase, espressa in radianti, deve essere $-\pi < \varphi < 0$, allora la soluzione accettabile è $\varphi = -\frac{\pi}{3}$

Impongo la seconda condizione assegnata nel punto a e determino la pulsazione ω:

$$\begin{cases} t = 1 \\ y = 2 \\ y = 2\cos\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{3}\right) \end{cases} \qquad 2\cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \qquad \cos\left(\omega - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \qquad \omega - \frac{\pi}{3} = 2k\pi \qquad \omega = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

poiché la pulsazione, espressa in $\frac{rad}{s}$ deve essere compresa fra $0 < \omega < \pi$ allora l'unica soluzione accettabile è $\omega = \frac{\pi}{3}\frac{rad}{s}$.



Dunque la legge oraria è $y(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3} \cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Tale funzione è periodica con periodo T=6 secondi, infatti

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi/3} = 6s$.

(il grafico viene mostrato per completezza ma non è richiesto dal quesito)

c) Derivo la legge oraria rispetto al tempo per trovare la velocità $v(t) = y'(t) = -2.\frac{\pi}{3} sen\left(\frac{\pi}{3}\cdot t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Determino gli intervalli di tempo in cui la velocità è positiva risolvendo la disequazione $v(t) > 0$

$$v(t) = -\frac{2}{3}\pi \cdot sen\left(\frac{\pi}{3}\cdot t - \frac{\pi}{3}\right) > 0 \quad sen\left(\frac{\pi}{3}\cdot t - \frac{\pi}{3}\right) < 0$$

Il primo periodo della funzione è compreso fra 0 e 6 secondi, di conseguenza gli estremi dell'intervallo relativo alla fase $\varphi(t)$ sono: $t = 0 \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$ $\qquad t = 6 \;\rightarrow\; \frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi$.

Quindi l'intervallo in cui risolvere la disequazione è $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{5}{3}\pi\right]$

La soluzione della disequazione è

$$-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}\cdot t - \frac{\pi}{3} < 0 \quad \vee \quad \pi < \frac{\pi}{3}\cdot t - \frac{\pi}{3} < \frac{5}{3}\pi$$

che posso scrivere anche così:

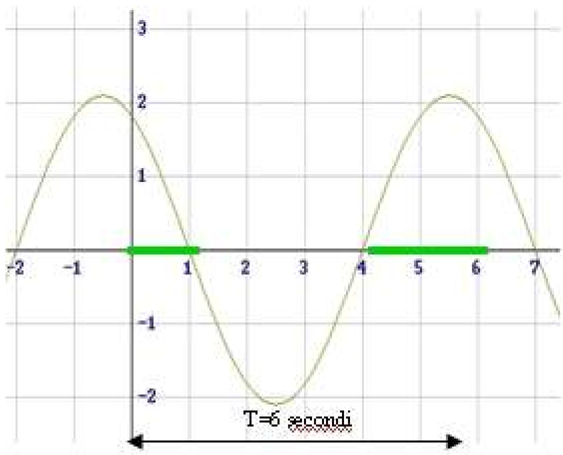
$$-\frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{3}\cdot(t-1) < 0 \quad \vee \quad \pi < \frac{\pi}{3}\cdot(t-1) < \frac{5}{3}\pi$$

Risolvendo le disequazioni ottenute in t si ha:

$$-1 < t-1 < 0 \quad \vee \quad 3 < t-1 < 5$$

e infine $0 < t < 1 \quad \vee \quad 4 < t < 6$

in accordo con quanto mostrato nel grafico della velocità
in funzione del tempo, riportato per completezza
ma non richiesto dal quesito.



QUESITO 3

Tra le seguenti funzioni individuare quelle dispari, motivando la risposta:

a) $f(x) = \frac{x^4 + x^2}{senx}$ b) $f(x) = x^3 + x + 1$ c) $f(x) = \frac{\cos x}{\ln x}$ d) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}$

La a) è una funzione dispari, infatti: $f(-x) = \frac{(-x)^4 + (-x)^2}{sen(-x)} = \frac{x^4 + x^2}{-senx} = -f(x)$

anche la d) è una funzione dispari, infatti: $f(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-1} = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -f(x)$.

Il quesito richiede solo di individuare quelle dispari ma, per chiarezza, aggiungiamo la discussione anche delle altre funzioni:

la b) è né pari né dispari, essendo una funzione razionale intera somma di monomi di grado pari e dispari;
la c) è definita solo per x>0 quindi non ha senso chiedersi se è pari o dispari;
la e) è sempre positiva nel suo dominio quindi non può essere simmetrica rispetto all'origine degli assi, che è tipico di una funzione dispari.

QUESITO 4

Data la funzione $y = \begin{cases} \dfrac{sen2x}{4x} & se \quad x<0 \\ \sqrt{x^2+a} & se \quad x \geq 0 \end{cases}$ con $a \in R$

Determinare per quale valore del parametro a la funzione è continua in x=0.

E' applicabile il teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right]$?

Puoi affermare con certezza che esistono o non esistono zeri della funzione?

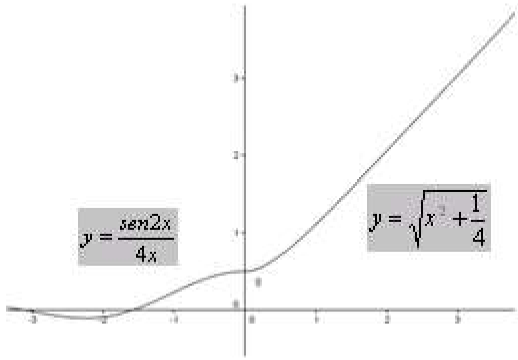
Impongo la continuità in x=0

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{4x} = \lim_{x\to 0}\frac{sen2x}{2x}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+a} = f(0) = \sqrt{a} \quad \text{segue, dunque, che} \quad \sqrt{a} = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad a = \frac{1}{4}$$

La funzione così ottenuta è continua in $\left[-\frac{\pi}{4};\frac{1}{2}\right]$,

allora calcolo il valore di f(x) negli estremi dell'intervallo indicato:



$$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{sen\left(-2\frac{\pi}{4}\right)}{4\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{\pi} > 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

i valori sono concordi, quindi non si può applicare il teorema di esistenza degli zeri e non si può affermare con certezza che esistano zeri nell'intervallo indicato.

QUESITO 5

In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni della base stanno tra loro come 3:2. Sapendo che la somma delle tre dimensioni è 25cm e che la superficie laterale è 300cm^2, calcolare le tre dimensioni.

$$\begin{cases} \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \\ a+b+c=25 \\ 2(a+b)c = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} a = \frac{3}{2}b \\ \frac{3}{2}b+b+c=25 \\ 2(\frac{3}{2}b+b)c=300 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ \frac{5}{2}b = 25-c \\ 2\frac{5}{2}bc = 300 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ \frac{5}{2}b = 25-c \\ b = \frac{60}{c} \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ \frac{5}{2}\frac{60}{c} = 25-c \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ c^2-25c+150=0 \\ -- \end{cases}$$

$$\begin{cases} -- \\ c_{1,2} = \frac{25\pm\sqrt{625-600}}{2} = \left\langle \begin{matrix} 15 \\ 10 \end{matrix} \right. \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{3}{2}b_1 = \frac{3}{2}4 = 6 \\ c_1 = 15 \\ b_1 = \frac{60}{c_1} = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} a_2 = \frac{3}{2}b_2 = \frac{3}{2}6 = 9 \\ c_2 = 10 \\ b_2 = \frac{60}{c_2} = 6 \end{cases}$$

2 soluzioni accettabili

QUESITO 6

Siano date le funzioni $f(x)=x^2-3x+3$ e $g(x)=x^3-11x+15$ risolvere l'equazione $f'(x)=g'(x)$ e sia x_0 la soluzione nell'intervallo [0,4]. Che cosa si può dedurre relativamente ai grafici di f e di g nel punto di ascissa x_0?

$$f'(x)=2x-3$$
$$g'(x)=3x^2-11$$

$$f'(x)=g'(x)$$
$$2x-3=3x^2-11$$
$$3x^2-2x-8=0$$
$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1+24}}{3}=\frac{1\pm 5}{3}=\left\langle\begin{array}{l}2\\ -\frac{4}{3}\end{array}\right.$$

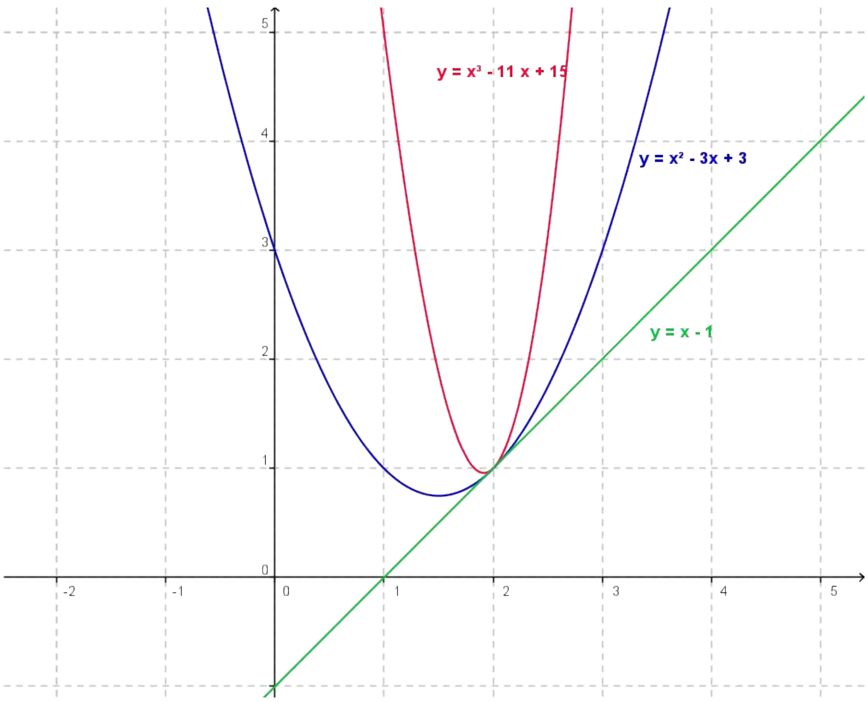
la soluzione che cade nell'intervallo [0,4] è $x_0=2$.

Nel punto di ascissa x_0 le due funzioni hanno tangenti con la stessa pendenza.

Risulta, inoltre, che nel punto di ascissa 2 i due grafici siano tangenti fra loro; infatti, calcolando le tangenti, si ottiene:

$$f'(2)=2\cdot 2-3=1 \qquad f(2)=2^2-3\cdot 2+3=1 \qquad y-f(2)=f'(2)(x-2) \qquad y-1=1(x-2) \qquad y=x-1$$
$$g'(2)=3\cdot 2^2-11=1 \qquad g(2)=2^3-11\cdot 2+15=1 \qquad y-g(2)=g'(2)(x-2) \qquad y-1=1(x-2) \qquad y=x-1$$

come si vede anche dal grafico (che peraltro non è richiesto dal quesito).



QUESITO 7

Se $f(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + 15x + 50$ con $a \in \Re$, sapendo che $(x+2)$ è un fattore di f(x), calcolare a. Sapendo, inoltre, che $f(5) = 0$ sviluppare f(x) in fattori di 1° grado. Determinare il segno di f(x).

Scompongo con Ruffini

	1	-3	a	15	50
-2		-2	10	-20-2a	10+4a
	1	-5	10+a	-5-2a	60+4a

Se $(x+2)$ è un fattore allora il resto deve essere uguale a zero: $60 + 4a = 0$ $\quad a = -\frac{60}{4} = -15$.

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 15x + 50 = (x+2)(x^3 - 5x^2 - 5x + 25)$$

Sapendo, inoltre, che $f(5) = 0$ scompongo ancora con Ruffini il fattore di terzo grado

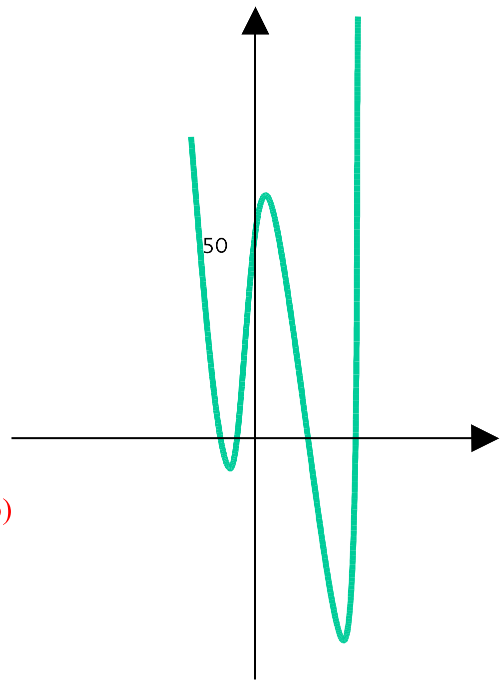
	1	-5	-5	25
5		5	0	-25
	1	0	-5	0

Ottengo, dunque

$$f(x) = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 15x + 50 = (x+2)(x-5)(x^2-5) = (x+2)(x-5)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$$

Studio il segno di *f(x)*

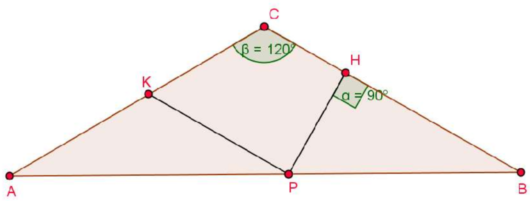
	$-\sqrt{5}$	-2	$\sqrt{5}$	5	
$(x+2)$	-	-	+	+	+
$(x-5)$	-	-	-	-	+
(x^2-5)	+	-	-	+	+
p	+	-	+	-	+



(il grafico della f(x) è mostrato per completezza ma non è richiesto dal quesito)

Quesito 8

Il triangolo isoscele ABC in figura ha base $AB = 2$ e angolo al vertice di 120°; il punto P è un generico punto del lato AB, il segmento PK è parallelo al lato BC e H è la proiezione ortogonale di P sul lato BC. Porre $\overline{AP} = 2x$ ed esprimere, al variare di P sul lato AB, il rapporto tra le aree dei triangoli PHC e PKC. Classificare le discontinuità della funzione ottenuta.

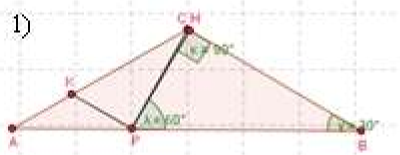


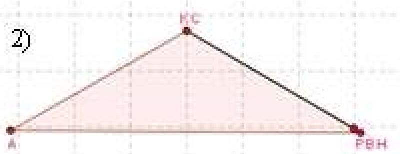
Nel triangolo ABC si ha $\overline{AC} = \overline{BC} = \dfrac{\overline{AB}/2}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, gli angoli acuti in A e in B valgono 30°

Le limitazioni geometriche sono

1) se $H \equiv C$ si ha $\overline{PB} = \dfrac{\overline{CB}}{\text{sen}60^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{4}{3}$ e $\overline{AP} = \overline{AB} - \overline{PB} = 2 - \dfrac{4}{3} = \dfrac{2}{3}$

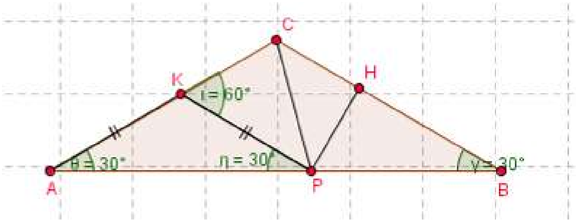
2) se $H \equiv B$ si ha $\overline{AP} = \overline{AB} = 2$





quindi $\dfrac{2}{3} < \overline{AB} < 2$ $\quad \dfrac{2}{3} < 2x < 2$ $\quad \dfrac{1}{3} < x < 1$

Considero il triangolo AKP:



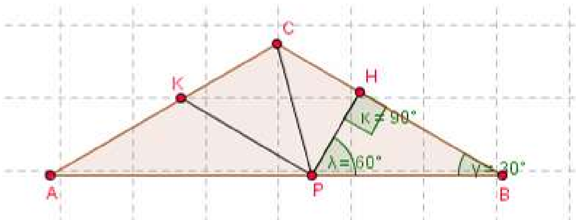
I triangoli AKP e ACB sono simili perché PK è parallelo a BC e l'angolo in A è comune, allora anche AKP è isoscele sulla base AP

$$\overline{PK} = \overline{AK} = \frac{\overline{AP}/2}{\cos 30^\circ} = \frac{2}{\sqrt{3}}x$$

$$\overline{CK} = \overline{AC} - \overline{AK} = \frac{2}{\sqrt{3}}(1-x)$$

$$A_{PKC} = \frac{1}{2}\overline{CK} \cdot \overline{PK} \cdot sen60^\circ = \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}(1-x)\frac{2}{\sqrt{3}}x\frac{1}{2} = \frac{1}{3}(x - x^2)$$

Considero il triangolo PHB retto in H



$$\overline{PB} = \overline{AB} - \overline{AP} = 2 - 2x = 2(1-x)$$

$$\overline{PH} = \overline{PB} \cdot sen30^\circ = \frac{1}{2}2(1-x) = 1 - x$$

$$\overline{HB} = \overline{PB} \cdot cos30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}2(1-x) = \sqrt{3}(1-x)$$

$$\overline{CH} = \overline{CB} - \overline{HB} = \frac{2}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}(1-x) = \frac{\sqrt{3}}{3}(3x-1)$$

$$A_{PHC} = \frac{1}{2}\overline{CH} \cdot \overline{PH} = \frac{1}{2}(1-x)\frac{\sqrt{3}}{3}(3x-1) = \frac{\sqrt{3}}{6}(3x-1)(1-x)$$

Determino la funzione f(x)

$$f(x)=\frac{A_{PHC}}{A_{PKC}}=\frac{\sqrt{3}}{6}\cdot 3\cdot\frac{(3x-1)(1-x)}{x-x^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{-3x^2+4x-1}{x-x^2}$$

definita per $x\neq 0 \wedge x\neq 1$

dunque $D=(-\infty,0)\cup(0,1)\cup(1,+\infty)$

Classifico le discontinuità

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3x^2+4x-1}{x-x^2}=\infty$$ 2ª specie

$$\lim_{x\to 1}\frac{-3x^2+4x-1}{x-x^2}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x-1)(1-x)}{x(1-x)}=\lim_{x\to 1}\frac{3x-1}{x}=2$$ 3ª specie

quesito 9

Data la funzione $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, determinarne la derivata in un generico punto x_0 del suo dominio mediante la definizione.

Calcolo il rapporto incrementale $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in x_0 con incremento generico h della variabile indipendente e poi ne calcolo il limite per $h\to 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{\sqrt{(x_o+h)^2-1}-\sqrt{x_o^2-1}}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x_o+h)^2-1}-\sqrt{x_o^2-1}}{h}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

Ottengo una forma indeterminata e applico la regola opportuna per risolvere l'indeterminazione

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x_o+h)^2-1}-\sqrt{x_o^2-1}}{h}\cdot\frac{\sqrt{(x_o+h)^2-1}+\sqrt{x_o^2-1}}{\sqrt{(x_o+h)^2-1}+\sqrt{x_o^2-1}}=\lim_{h\to 0}\frac{(x_o+h)^2-1-x_o^2+1}{h\left(\sqrt{(x_o+h)^2-1}+\sqrt{x_o^2-1}\right)}=$$

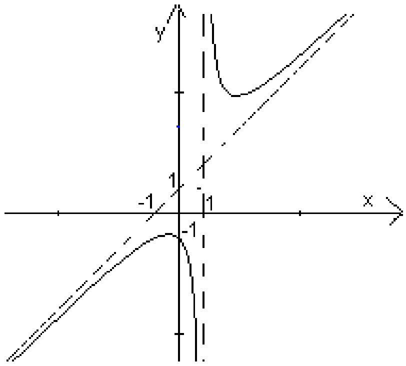
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2x_0h}{h\left(\sqrt{(x_o+h)^2-1}+\sqrt{x_o^2-1}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{h+2x_0}{\sqrt{(x_o+h)^2-1}+\sqrt{x_o^2-1}}=\frac{2x_0}{2\sqrt{x_o^2-1}}=\frac{x_0}{\sqrt{x_o^2-1}}$$

$$f'(x)=\frac{x_0}{\sqrt{x_o^2-1}}$$

quesito 10
Quale potrebbe essere l'espressione analitica della funzione rappresentata a fianco?
Motivare esaurientemente se ciascuna di esse può o non può essere rappresentata dal grafico.

$a)\, y = \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ $\qquad c)\, y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}$

$b)\, y = \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$ $\qquad d)\, y = \sqrt{\frac{x^3 + 1}{x - 1}}$



Riconosco tre funzioni razionali fratte a), b), c) quindi considero la regola che deve valere affinché tali funzioni presentino un asintoto obliquo:

(#) Una funzione razionale fratta può avere asintoto obliquo solo se il grado n del numeratore e il grado m del denominatore sono nella relazione n=m+1.

Per la regola (#) escludo la funzione b), infatti

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - 1} = 0$ ha dunque un asintoto orizzontale

Bisogna escludere anche la funzione a) che, pur verificando la regola (#), non può avere alcun asintoto verticale essendo definita e continua in tutto $\Re$.

La funzione razionale fratta c) è compatibile con il grafico; infatti:

- ha dominio $D = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$,
- $\lim_{x \to 1^\pm} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \pm\infty$ quindi x=1 è asintoto verticale
- verifica la regola (#) e infatti $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \pm\infty$, compatibile con l'asintoto obliquo
- calcolando l'equazione dell'asintoto obliquo si ottiene $y = x + 1$, così come mostrato nel grafico
- inoltre risulta $f(x) > 0$ per x>1.

La funzione irrazionale d) deve essere esclusa perché il suo grafico è sempre positivo nel dominio naturale $D = (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.