Data l'equazione

$$(m+1)x^2-2(m-1)x+m-2=0\,, \qquad m\in R$$

a) Si determini per quali valori di m essa ammette soluzioni reali e si ricavi il parametro m in funzione della x, si tracci poi il grafico della funzione ottenuta

L'equazione ammette soluzioni reali se il discriminante è non negativo

$$\frac{\Delta}{4}=(m-1)^2-(m+1)(m-2)\ge 0 \qquad -m+3\ge 0 \qquad m\le 3$$

Ricavo $m=f(x)$

$$mx^2+x^2-2mx+2x+m-2=0 \qquad m(x^2-2x+1)+x^2+2x-2=0 \qquad m=f(x)=-\frac{x^2+2x-2}{(x-1)^2}$$

Studio la funzione

$$f(x)=\frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2}$$

Dominio

$$(x-1)^2\ne 0 \quad x\ne 1 \qquad D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$$

Segno $f(x)>0$

poiché il denominatore è sempre positivo in D allora basta studiare il segno del numeratore

N>0 $2-2x-x^2>0 \quad x^2+2x-2<0 \quad x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1+2}=-1\pm\sqrt{3}$

$I.P. \qquad -1-\sqrt{3}<x<-1+\sqrt{3}$

Intersezioni e zeri

$$\begin{cases}x=0\\ y=\dfrac{2-2x-x^2}{(x-1)^2}\end{cases} \qquad \begin{cases}x=0\\ y=2\end{cases} \qquad A(0;2)$$

$$\begin{cases}y=0\\ y=\dfrac{2-2x-x^2}{(x-1)^2}\end{cases} \qquad \begin{cases}--\\ x=-1\pm\sqrt{3}\end{cases} \qquad B(-1-\sqrt{3};0) \ \vee \ C(-1+\sqrt{3};0)$$

limiti

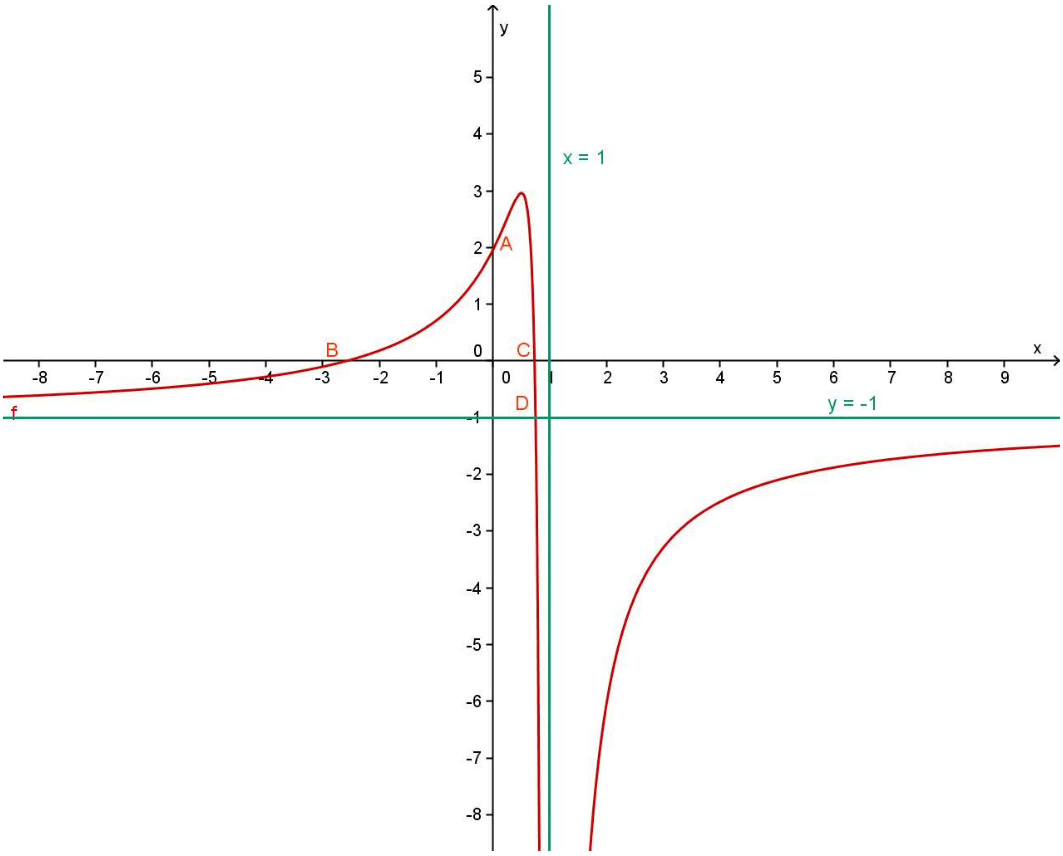
$$\lim_{x\to 1^\pm} f(x)=\lim_{x\to 1^\pm}\frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2}=-\infty \qquad \Rightarrow \qquad x=1 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x}-1\right)}{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}=-1 \qquad \Rightarrow \qquad y=-1 \text{ è asintoto orizzontale}$$

intersezioni con l'asintoto orizzontale

$$\begin{cases}y=-1\\ y=\dfrac{2-2x-x^2}{(x-1)^2}\end{cases} \qquad \begin{cases}--\\ \dfrac{2-2x-x^2}{(x-1)^2}=-1\end{cases} \qquad \begin{cases}--\\ 2-2x-x^2=-(x-1)^2\end{cases} \qquad \begin{cases}--\\ 2-2x-x^2=-x^2+2x-1\end{cases}$$

$\begin{cases} -- \\ 4x = 3 \end{cases}$ $\qquad D\left(\frac{3}{4};-1\right)$ il grafico probabile è, dunque:



b) Posto

(*) $\qquad y = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2$,

si risolva il sistema che si ottiene attribuendo a m i valori particolari m=0 e m=-2, e si mostri che la soluzione ottenuta soddisfa la (*), qualunque sia il valore di m.
Si disegnino le due parabole corrispondenti ai precedenti valori particolari del parametro m, si verifichi che esse sono tangenti nel loro punto comune.

Per m=0 si ottiene $\mathcal{P}_1$: $y = x^2 + 2x - 2$ $\qquad$ Per m=-2 si ottiene $\mathcal{P}_2$: $y = -x^2 + 6x - 4$

$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 + 6x - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -- \\ x^2 + 2x - 2 = -x^2 + 6x - 4 \end{cases}$ $\begin{cases} -- \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -- \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad A(1;1)$

A(1;1) è punto doppio, quindi è punto di tangenza tra le parabole, cioè è punto in cui le parabole hanno la medesima tangente.

Sostituendo in (*) le coordinate di A ottengo un'identità indipendente da m:

$1 = m + 1 - 2(m-1) + m - 2 \qquad 1 = 1$

Disegno le parabole:

$\mathcal{P}_1$: $y = x^2 + 2x - 2$

$a = 1$ conc. verso l'alto

$$asse: \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$$

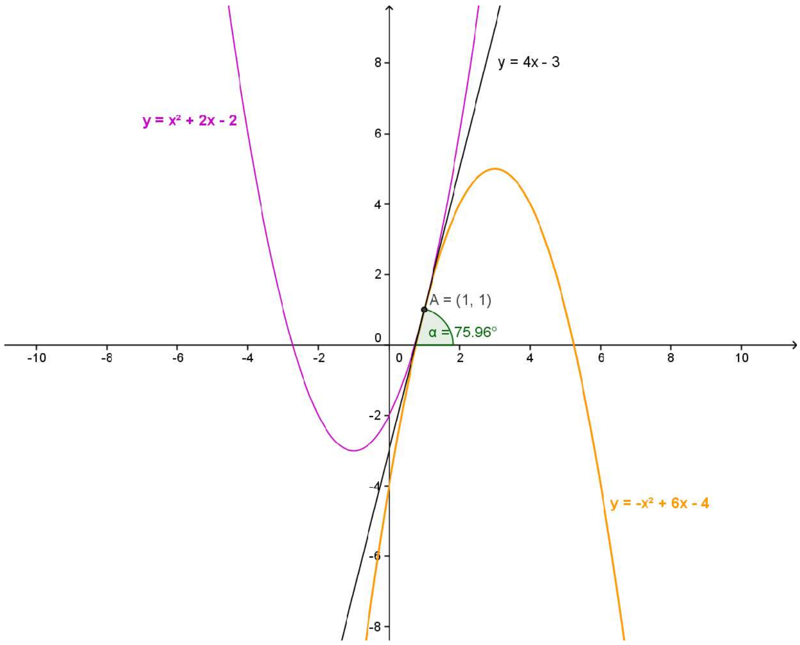
$$vertice: \quad V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad V(-1;-3)$$

$\mathcal{P}_2$: $y = -x^2 + 6x - 4$

$a = -1$ conc. verso il basso

$$asse: \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3$$

$$vertice: \quad V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \qquad V(3;5)$$



c) Trovare l'equazione della retta tangente alle parabole nel loro punto comune e determinare, in gradi primi e secondi, l'angolo che tale tangente forma con l'asse delle ascisse.

Determino l'equazione della tangente alle parabole nel punto comune A

$f(x) = x^2 + 2x - 2$ $\qquad$ $g(x) = -x^2 + 6x - 4$

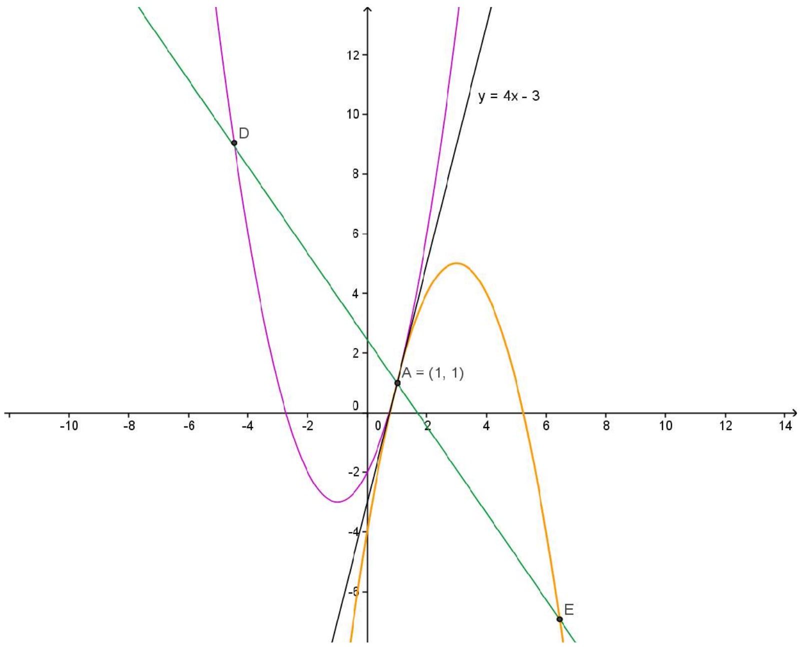
$\mathcal{P}_1$: $f'(x) = 2x + 2$ $\quad f'(1) = 4$ $\qquad$ $\mathcal{P}_2$: $g'(x) = -2x + 6$ $\quad g'(1) = 4$ $\qquad \alpha = arctg(4) = 75°57'36''$

$y - 1 = 4(x-1)$ $\quad y = 4x - 3$ $\qquad$ $y - 1 = 4(x-1)$ $\quad y = 4x - 3$

d) Si dimostri che le due parabole precedenti staccano su una qualunque retta passante per il punto comune, salvo la retta x=1, due corde uguali.

Se le due corde $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ fossero uguali allora i punti E e D dovrebbero corrispondersi nella simmetria centrale di centro A(1,1). Tale simmetria ha equazione:

$$\begin{cases} X = 2 \cdot 1 - x \\ Y = 2 \cdot 1 - y \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 2 - x \\ Y = 2 - y \end{cases}$$



Il punto D appartiene alla parabola $\mathcal{P}_1$ dunque, detta t la sua ascissa, le sue coordinate sono $D(t, t^2 + 2t - 2)$.

Sostituendo le coordinate di D nell'equazione della simmetria determino le coordinate $(X;Y)$ del suo punto corrispondente:

$$\begin{cases} X = 2 - t \\ Y = 2 - t^2 - 2t + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} X = 2 - t \\ Y = 4 - t^2 - 2t \end{cases}$$

che è l'equazione parametrica del luogo dei punti simmetrici di D rispetto ad A, al variare di D sulla parabola $\mathcal{P}_1$.

Ricavo l'equazione cartesiana del luogo: $\begin{cases} t = 2 - X \\ Y = 4 - (2 - X)^2 - 2(2 - X) \end{cases}$ $\quad Y = 4 - 4 - X^2 + 4X - 4 + 2X$

$Y = -X^2 + 6X - 4$, che è proprio l'equazione della parabola $\mathcal{P}_2$

e) **Determinare l'equazione cartesiana del luogo geometrico del punto medio del segmento staccato dalla retta del quesito precedente sulla parabola ottenuta per m=-2, riconoscere di che tipo di curva si tratta.**

Considero la corda AE che la parabola $\mathcal{P}_2$ stacca su un a delle infinite rette del fascio di centro A.
Le coordinate degli estremi della corda sono: A(1;1) ed $E(t, -t^2 + 6t - 4)$. Dunque le coordinate del punto medio M della corda AE sono:

$$M(x, y): \quad \begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_E}{2} \\ y = \dfrac{y_A + y_E}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+t}{2} \\ y = \dfrac{1 - t^2 + 6t - 4}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1+t}{2} \\ y = \dfrac{-t^2 + 6t - 3}{2} \end{cases}$$

che descrivono in forma parametrica l'equazione del luogo dei punti medi delle corde al variare di E sulla parabola $\mathcal{P}_2$..

L'equazione cartesiana del luogo è

$$\begin{cases} t = 2x - 1 \\ y = \dfrac{1 - (2x-1)^2 + 6(2x-1) - 4}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad y = \frac{-(4x^2 - 4x + 1) + 12x - 6 - 3}{2} = \frac{-4x^2 + 4x - 1 + 12x - 6 - 3}{2}$$

$y = -2x^2 + 8x - 5$
che è l'equazione di una parabola.

Tale parabola appartiene al fascio (*) e si ottiene per $m = -3$.

In figura si vede, in verde, la traccia lasciata dal punto medio M della corda AE al variare di E sulla parabola e, in rosso, il grafico del luogo trovato.