

## Data l'equazione

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0, \quad m \in \mathbb{R}$$

- a) Si determini per quali valori di  $m$  essa ammette soluzioni reali e si ricavi il parametro  $m$  in funzione della  $x$ , si tracci poi il grafico della funzione ottenuta

L'equazione ammette soluzioni reali se il discriminante è non negativo

$$\frac{\Delta}{4} = (m-1)^2 - (m+1)(m-2) \geq 0 \quad -m+3 \geq 0 \quad m \leq 3$$

Ricavo  $m = f(x)$

$$mx^2 + x^2 - 2mx + 2x + m - 2 = 0 \quad m(x^2 - 2x + 1) + x^2 + 2x - 2 = 0 \quad m = f(x) = -\frac{x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$$

Studio la funzione

$$f(x) = \frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2}$$

Dominio

$$(x-1)^2 \neq 0 \quad x \neq 1 \quad D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$$

Segno  $f(x) > 0$

poiché il denominatore è sempre positivo in  $D$  allora basta studiare il segno del numeratore

$$N > 0 \quad 2 - 2x - x^2 > 0 \quad x^2 + 2x - 2 < 0 \quad x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1+2} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$I.P. \quad -1 - \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{3}$$

Intersezioni e zeri

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \quad A(0;2)$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x = -1 \pm \sqrt{3} \end{cases} \quad B(-1-\sqrt{3};0) \quad \vee \quad C(-1+\sqrt{3};0)$$

limiti

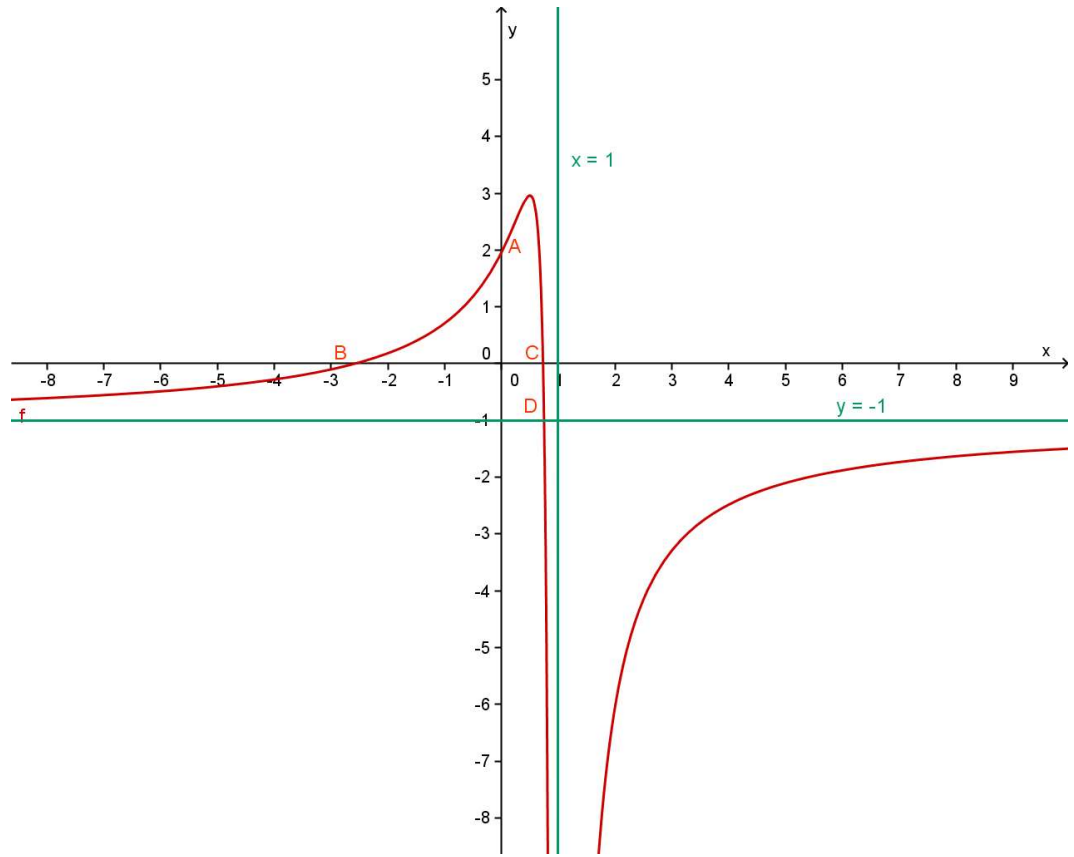
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2} = -\infty \quad \Rightarrow \quad x=1 \text{ è asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left( \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x} - 1 \right)}{x^2 \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = -1 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \text{ è asintoto orizzontale}$$

intersezioni con l'asintoto orizzontale

$$\begin{cases} y = -1 \\ y = \frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2} \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ \frac{2-2x-x^2}{(x-1)^2} = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2-2x-x^2 = -(x-1)^2 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2-2x-x^2 = -x^2+2x-1 \end{cases}$$

$\begin{cases} - \\ 4x = 3 \end{cases} \quad D\left(\frac{3}{4}; -1\right)$  il grafico probabile è, dunque:



b) Posto

$$(*) \quad y = (m + 1)x^2 - 2(m - 1)x + m - 2,$$

si risolve il sistema che si ottiene attribuendo a m i valori particolari m=0 e m=-2, e si mostri che la soluzione ottenuta soddisfa la (\*), qualunque sia il valore di m.

Si disegnino le due parabole corrispondenti ai precedenti valori particolari del parametro m, si verifichi che esse sono tangenti nel loro punto comune.

Per m=0 si ottiene  $\mathcal{P}_1: y = x^2 + 2x - 2$

Per m=-2 si ottiene  $\mathcal{P}_2: y = -x^2 + 6x - 4$

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 2 \\ y = -x^2 + 6x - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x^2 + 2x - 2 = -x^2 + 6x - 4 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x^2 - 4x + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ (x - 1)^2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad A(1;1)$$

A(1;1) è punto doppio, quindi è punto di tangenza tra le parabole, cioè è punto in cui le parabole hanno la medesima tangente.

Sostituendo in (\*) le coordinate di A ottengo un'identità indipendente da m:

$$1 = m + 1 - 2(m - 1) + m - 2 \quad 1 = 1$$

Disegno le parabole:

$\mathcal{P}_1: y = x^2 + 2x - 2$

$a = 1$  conc. verso l'alto

asse:  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1$

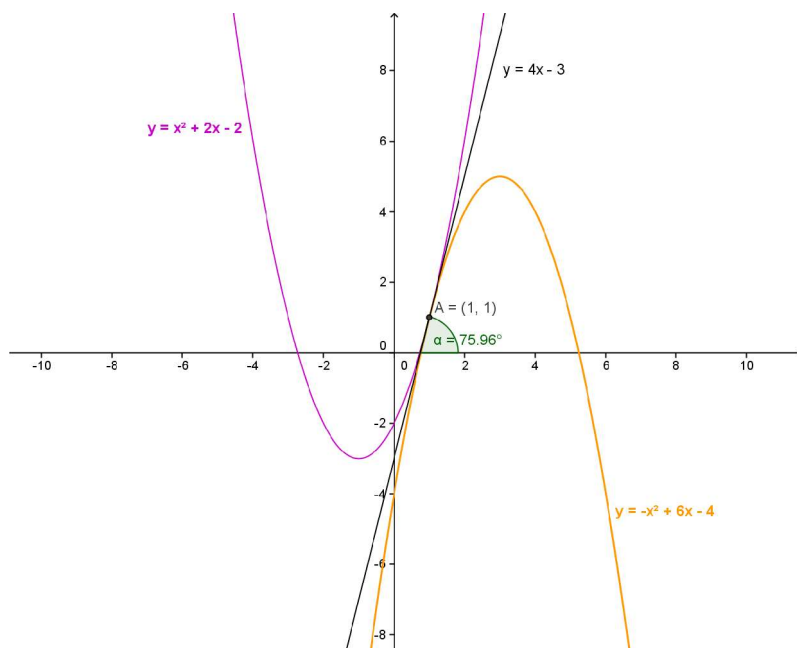
vertice:  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad V(-1; -3)$

$\mathcal{P}_2: y = -x^2 + 6x - 4$

$a = -1$  conc. verso il basso

asse:  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(-1)} = 3$

vertice:  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right) \quad V(3; 5)$



c) Trovare l'equazione della retta tangente alle parabole nel loro punto comune e determinare, in gradi primi e secondi, l'angolo che tale tangente forma con l'asse delle ascisse.

Determino l'equazione della tangente alle parabole nel punto comune A

$f(x) = x^2 + 2x - 2$

$g(x) = -x^2 + 6x - 4$

$\mathcal{P}_1: f'(x) = 2x + 2 \quad f'(1) = 4$

$\mathcal{P}_2: g'(x) = -2x + 6 \quad g'(1) = 4$

$\alpha = \arctg(4) = 75^\circ 57' 36''$

$y - 1 = 4(x - 1) \quad y = 4x - 3$

$y - 1 = 4(x - 1) \quad y = 4x - 3$

d) Si dimostri che le due parabole precedenti staccano su una qualunque retta passante per il punto comune, salvo la retta  $x=1$ , due corde uguali.

Se le due corde  $\overline{AD}$  e  $\overline{AE}$  fossero uguali allora i punti E e D dovrebbero corrispondersi nella simmetria centrale di centro A(1,1). Tale simmetria ha equazione:

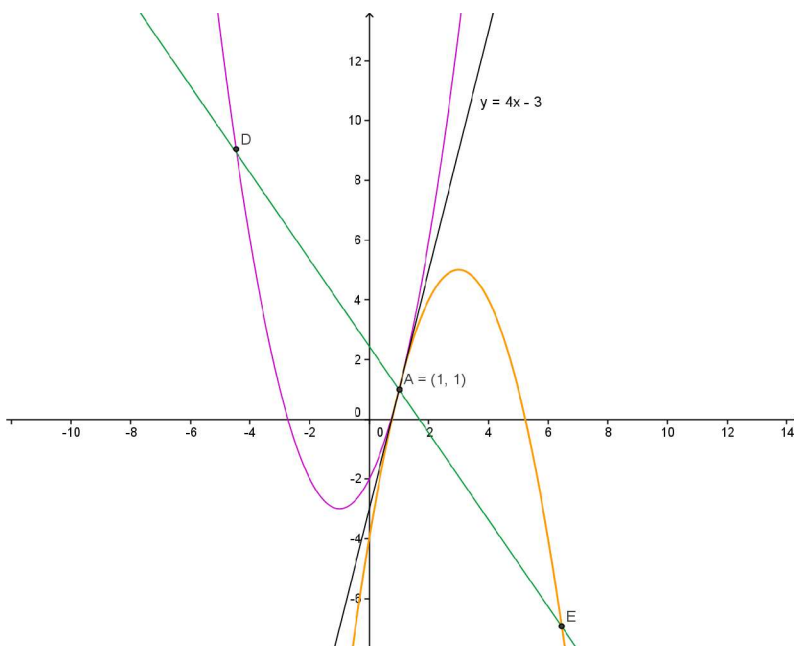
$$\begin{cases} X = 2 \cdot 1 - x \\ Y = 2 \cdot 1 - y \end{cases} \quad \begin{cases} X = 2 - x \\ Y = 2 - y \end{cases}$$

Il punto D appartiene alla parabola  $\mathcal{P}_1$  dunque, detta t la sua ascissa, le sue coordinate sono  $D(t, t^2 + 2t - 2)$ .

Sostituendo le coordinate di D nell'equazione della simmetria determino le coordinate  $(X; Y)$  del suo punto corrispondente:

$$\begin{cases} X = 2 - t \\ Y = 2 - t^2 - 2t + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} X = 2 - t \\ Y = 4 - t^2 - 2t \end{cases}$$

che è l'equazione parametrica del luogo dei punti simmetrici di D rispetto ad A, al variare di D sulla parabola  $\mathcal{P}_1$ .



Ricavo l'equazione cartesiana del luogo: 
$$\begin{cases} t = 2 - X \\ Y = 4 - (2 - X)^2 - 2(2 - X) \end{cases} \quad Y = 4 - 4 - X^2 + 4X - 4 + 2X$$

$Y = -X^2 + 6X - 4$ , che è proprio l'equazione della parabola  $\mathcal{P}_2$

- e) **Determinare l'equazione cartesiana del luogo geometrico del punto medio del segmento staccato dalla retta del quesito precedente sulla parabola ottenuta per  $m=-2$ , riconoscere di che tipo di curva si tratta.**

Considero la corda AE che la parabola  $\mathcal{P}_2$  stacca su una delle infinite rette del fascio di centro A.

Le coordinate degli estremi della corda sono: A(1;1) ed  $E(t, -t^2 + 6t - 4)$ . Dunque le coordinate del punto medio M della corda AE sono:

$$M(x, y) : \begin{cases} x = \frac{x_A + x_E}{2} \\ y = \frac{y_A + y_E}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1+t}{2} \\ y = \frac{1-t^2+6t-4}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{1+t}{2} \\ y = \frac{-t^2+6t-3}{2} \end{cases}$$

che descrivono in forma parametrica l'equazione del luogo dei punti medi delle corde al variare di E sulla parabola  $\mathcal{P}_2$ .

L'equazione cartesiana del luogo è

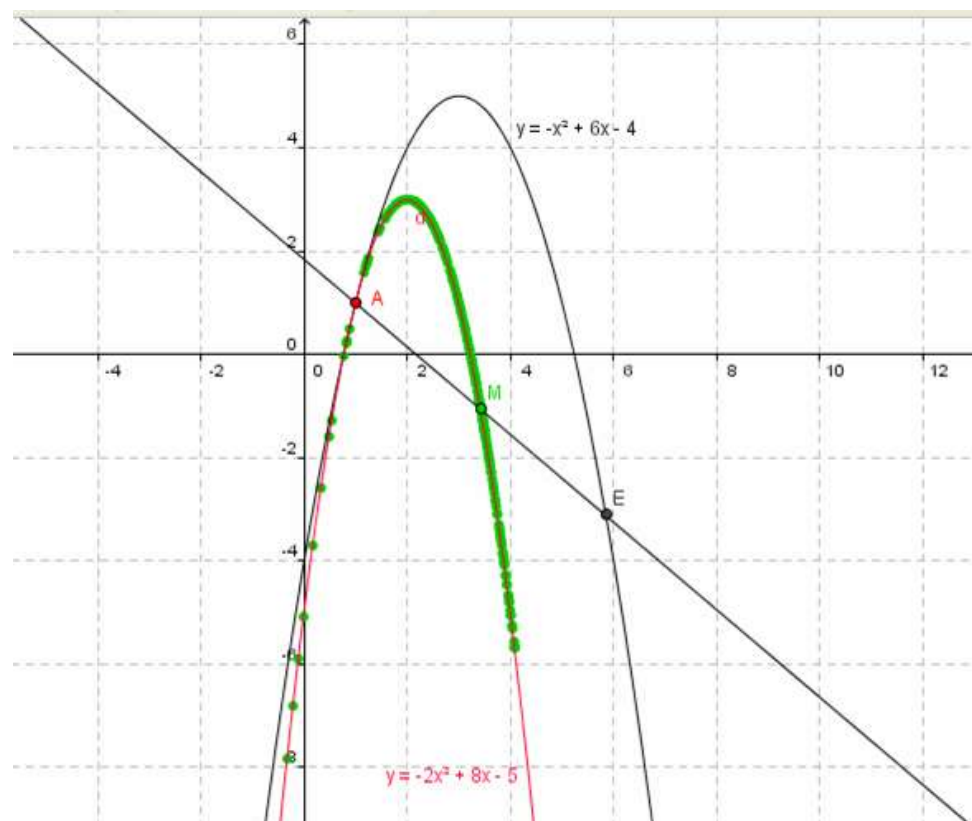
$$\begin{cases} t = 2x - 1 \\ y = \frac{1 - (2x - 1)^2 + 6(2x - 1) - 4}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{-(4x^2 - 4x + 1) + 12x - 6 - 3}{2} = \frac{-4x^2 + 4x - 1 + 12x - 6 - 3}{2}$$

$$y = -2x^2 + 8x - 5$$

che è l'equazione di una parabola.

Tale parabola appartiene al fascio (\*) e si ottiene per  $m = -3$ .

In figura si vede, **in verde**, traccia lasciata dal punto medio M della corda AE al variare di E sulla parabola **in rosso**, il grafico del luogo trovato.



la  
e,