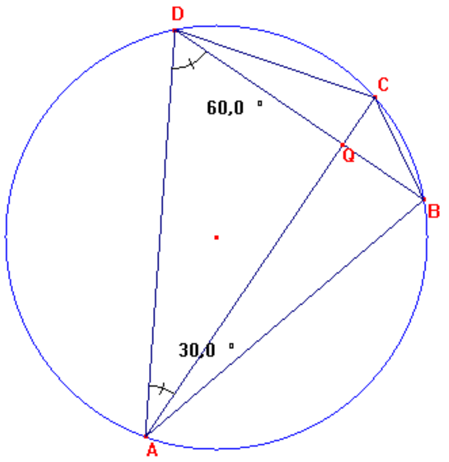
**PROBLEMA 1**

In un cerchio di raggio 1 e centro O è inscritto un quadrilatero ABCD contenente O. Sapendo che AB è uguale al lato del triangolo equilatero inscritto, che CD è uguale al raggio, e posto $B\hat{O}C = 2x$,

a. verificare che AC e BD sono perpendicolari e si esprima in funzione di r ed x l'area del quadrilatero, $A=f(x)$.



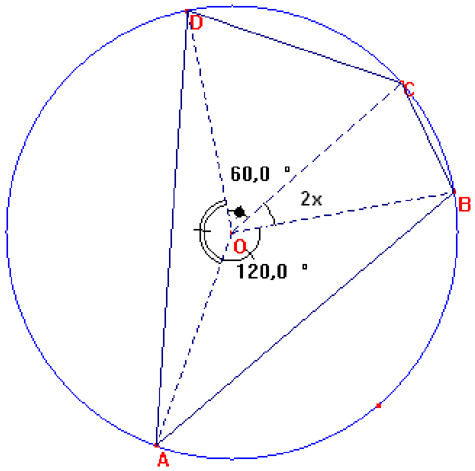

$A\hat{D}B = \frac{\pi}{3}$ perché angolo alla circonferenza che insiste su AB lato del triangolo equilatero,

$D\hat{A}B = \frac{\pi}{6}$ perché $D\hat{A}B = \frac{D\hat{O}C}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3}$ ricordando che DC è uguale al raggio. Dunque

$D\hat{Q}A = \frac{\pi}{2}$

$B\hat{O}C = 2x$

$A\hat{O}D = \pi - 2x$




$AreaAOB = 1.\sin\frac{2\pi}{3}.\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} = AreaCOD$

$AreaCOB = 1.\sin 2x.\frac{1}{2}$

$AreaAOD = 1.\sin(\pi - 2x).\frac{1}{2} = \sin 2x.\frac{1}{2}$

Quindi $A=f(x)=2.\sin x.\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}$

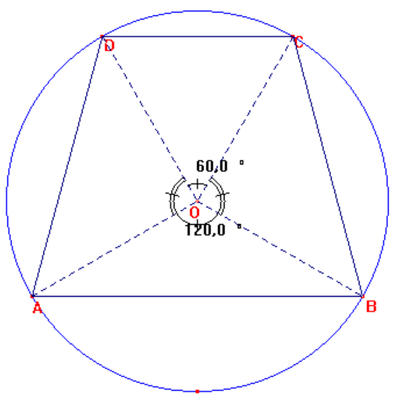
b. Trovare per quale valore di x, nei limiti geometrici, il grafico di f(x) ha tangente parallela all'asse delle ascisse e costruire il quadrilatero nel caso della soluzione trovata

Limiti geometrici: poiché $B\hat{O}C + A\hat{O}D = \pi \quad 0 \le B\hat{O}C \le \pi$ cioè $0 \le x \le \frac{\pi}{2}$

La funzione ha tangente parallela all'asse delle ascisse se il suo m=0 cioè se y'=0

$f'(x)=2.(\cos^2 x - \sin^2 x)$ →y'=0→ $\cos^2 x = \sin^2 x$ → nei limiti geometrici unica soluzione $x = \frac{\pi}{4}$

c. Dopo aver verificato che in tale caso ABCD è un trapezio, considerare ABCD come base di una piramide avente altezza $\overline{VO} = 2r$ e calcolarne il volume




Nel caso trovato $B\hat{O}C = 2x = \frac{\pi}{2}$

quindi $D\hat{C}B = D\hat{C}O + O\hat{C}B = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ e $C\hat{B}A = C\hat{B}O + O\hat{B}A = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$

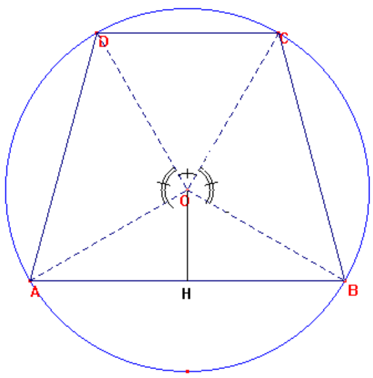
Dunque $D\hat{C}B + C\hat{B}A = \pi$ e, poiché angoli coniugati interni, le due rette AB e CD sono parallele.

Per calcolare l'area dibase della piramide sostituisco in $A=f(x)=2.\sin x.\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$

$A=\sin 2\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad V = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2+\sqrt{3}}{3}$

d. Trovare le particolarità delle facce laterali e determinare per una di esse, a scelta, l'area e la distanza del piano che la contiene dal centro O della circonferenza

Poiché il trapezio è inscritto in una circonferenza e l'altezza cade nel centro della circonferenza che è equidistante da tutti i vertici di base, allora possiamo affermare che tutte le facce sono triangoli isosceli.
Per calcolare la distanza di una di esse dal suddetto centro, per esempio della faccia ABV, calcolo il volume della piramide ABOV e applico poi la formula inversa del volume, considerandola una piramide di base ABV:




$$h_{ABV} = \sqrt{\overline{HO}^2 + \overline{OV}^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 4} = \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{ricordando che } O\hat{A}B = \frac{\pi}{6}$$

$$A_{ABV} = \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{51}}{4}$$

$$V_{AOBV} = A_{ABO} \cdot \overline{VO} \cdot \frac{1}{3} = \left( \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

La distanza cercata è $d = \dfrac{3 \cdot V_{AOBV}}{A_{ABV}} = \dfrac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{51}}{4}} = \dfrac{2}{\sqrt{17}}$

e. Tornando al quadrilatero iniziale, stabilire se vi è un valore di x per cui ABCD possa essere base di una piramide retta.

Una piramide retta ha la base circoscrittibile, dunque deve essere $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{BC} + \overline{AD}$

$\overline{BC} = 2r \cdot \sin x$ e $\overline{AD} = 2r \cdot \sin\left( \frac{\pi}{2} - x \right) = 2r \cos x$

Quindi $1 + \sqrt{3} = 2 \sin x + 2 \cos x$ equazione lineare

$$\begin{cases} 2X + 2Y = 1 + \sqrt{3} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases} \rightarrow Y = \frac{1 + \sqrt{3} - 2X}{2} \rightarrow \left( \frac{1 + \sqrt{3} - 2X}{2} \right)^2 + X^2 = 1$$

$$\frac{1 + 3 + 4X^2 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3}X - 4X}{4} + X^2 = 1$$

$$4X^2 - 2\left(1 + \sqrt{3}\right)X + \sqrt{3} = 0 \qquad \Delta = 3 + 1 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} = \left(1 - \sqrt{3}\right)^2$$

Quindi $X = \dfrac{1 + \sqrt{3} \pm \left(1 - \sqrt{3}\right)}{4}$ cioè $X = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e $Y = \dfrac{1}{2}$ oppure $X = \dfrac{1}{2}$ e $Y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ soluzioni simmetriche: $x = \dfrac{\pi}{6}$ o $x = \dfrac{\pi}{3}$