PROBLEMA 2

Si considerino la parabola di equazione $y = ax^2 - \frac{7}{3}x$ e l'iperbole di equazione $y = \frac{x - b}{d - x}$

a) Dopo aver determinato i parametri a, b, d in modo che le curve che le rappresentano passino per il punto comune $A(1;-2)$ e che l'iperbole abbia asintoto verticale di equazione $x = 4$, calcolare le coordinate dei punti B e C, ulteriori punti comuni fra le curve date, con $x_B < x_C$.

Impongo il passaggio della parabola per il punto A e ottengo $-2 = a - \frac{7}{3} \rightarrow a = \frac{1}{3}$. Quindi $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3}x$

Se l'iperbole ha asintoto in x=4 allora d-4=0, quindi $d = 4$. L'appartenenza di A all'iperbole dà: $-2 = \frac{1-b}{d-1}$ trovo quindi

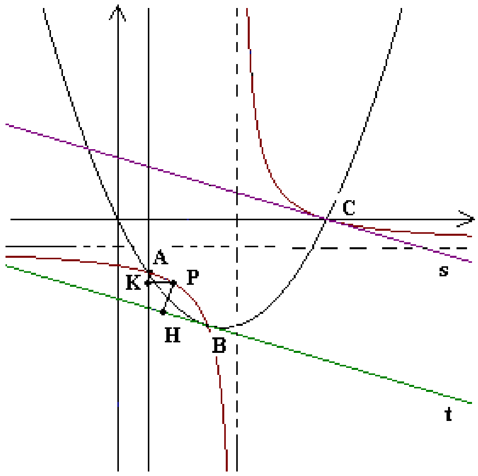
$$\begin{cases} b = 7 \\ d = 4 \end{cases} \quad \text{e} \quad y = \frac{x-7}{4-x}.$$

Per determinare gli altri punti conumi pongo a sistema $\begin{cases} y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{7}{3}x \\ y = \frac{x-7}{4-x} \end{cases}$ e trovo $x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0$, per risolvere scompongo con Ruffini sapendo che una soluzione è x=1 (punto comune noto)

	1	-11	+31	-21
1		1	-10	21
	1	-10	21	0

$x^3 - 11x^2 + 31x - 21 = 0 = (x-1)(x^2 - 10x + 21) = (x-1)(x-7)(x-3)$ i punti sono dunque B(3,-4) e C(7,0)

a) Determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola in B e l'equazione della retta s tangente all'iperbole in C.



Per trovare la retta t tangente alla parabola calcolo la derivata $y' = \frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$, in x=3 $f'(3) = \frac{2}{3}3 - \frac{7}{3} = -\frac{1}{3}$ e la retta $y + 4 = -\frac{1}{3}(x-3)$

cioè t: $y = -\frac{1}{3}x - 3$ ovvero $x + 3y + 9 = 0$

Per trovare la retta s $D\frac{x-7}{4-x} = \frac{4 - x - (x-7)(-1)}{(4-x)^2} = \frac{-3}{(4-x)^2}$

$f'(7) = \frac{-3}{(4-7)^2} = -\frac{1}{3}$ quindi s: $y = -\frac{1}{3}(x-7)$

b) Considerato il generico punto P appartenente all'arco AB dell'iperbole, esprimere in funzione dell'ascissa di P il rapporto $y = |f(x)| = \sqrt{10}\frac{\overline{PH}}{\overline{PK}}$, con $\overline{PH}$ distanza di P dalla tangente t e $\overline{PK}$ distanza di P dalla retta verticale passante per A.

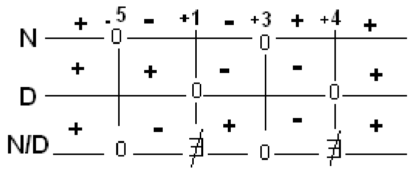
Detto $P\left(x, \frac{x-7}{4-x}\right)$ con $1 < x \leq 3$ trovo la distanza di P da t: $\overline{PH} = \frac{\left|x + 3\frac{x-7}{4-x} + 9\right|}{\sqrt{1+9}}$ e $\overline{PK} = |x-1|$ quindi

$$f(x) = \sqrt{10}\frac{\left|x + 3\frac{x-7}{4-x} + 9\right|}{\sqrt{1+9}} \cdot \frac{1}{|x-1|} = \left|\frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 5x + 4}\right|$$

c) Verificato che risulta $f(x)=\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-5x+4}$, disegnare il grafico probabile di $y=f(x)$ e da questo ricavare il grafico di $y=|f(x)|$, evidenziando il tratto relativo alle limitazioni geometriche del problema.

<u>Dominio</u> $x^2-5x+4\neq 0$ $\quad x\neq +1 \wedge x\neq +4$ $\quad D=(-\infty;1)\cup(1;4)\cup(4;+\infty)$

<u>Segno</u>:



$x^2+2x-15\geq 0 \quad x\leq -5 \vee x\geq 3$

$x^2-5x+4>0 \Rightarrow \quad x<+1 \vee x>+4$

<u>Zeri</u>

Le intersezioni con l’asse x sono (-3,0) e (5,0),

e quella con l’asse y: $\begin{cases} y=\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-5x+4} \\ x=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=-\dfrac{15}{4} \\ x=0 \end{cases}$

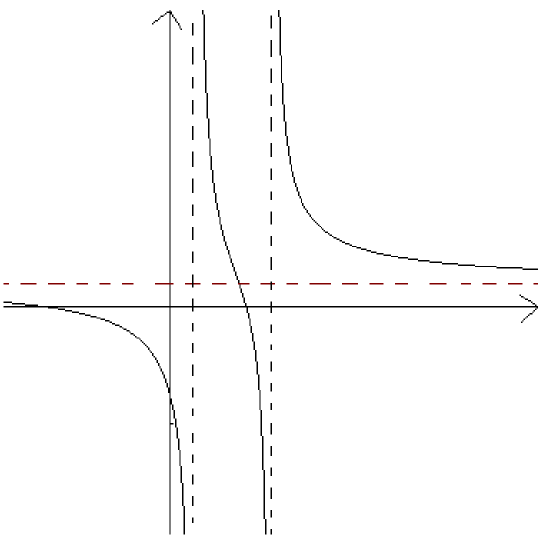
<u>limiti</u>

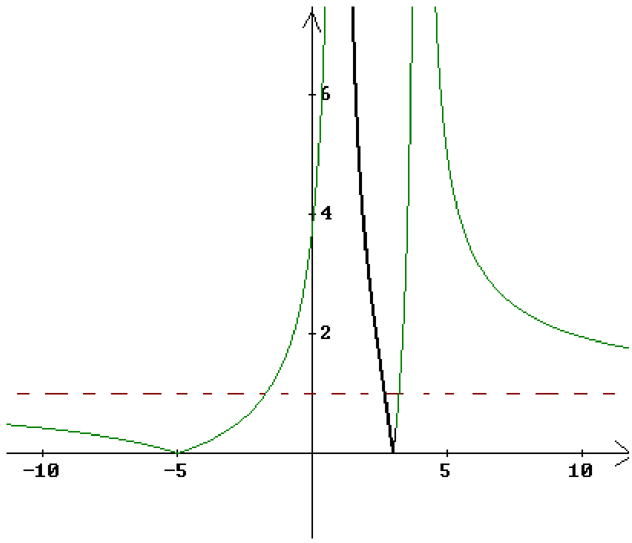
$\lim\limits_{x\to 1^{\pm}}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-5x+4}=\dfrac{-12}{0}=\pm\infty$ dunque x=1 è asintoto verticale

$\lim\limits_{x\to 4^{\pm}}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-5x+4}=\dfrac{9}{0}=\pm\infty$ dunque x=4 è asintoto verticale

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{15}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}=1$ dunque $y=1$ è asintoto orizzontale

Questo è il grafico di $y=f(x)$ e, a fianco, $y=|f(x)|$ con evidenziata la parte relativa ai limiti geometrici $1<x\leq 3$





d) Dimostrare analiticamente che il grafico di $y=f(x)$ non ha punti stazionari.

Studio la derivata della funzione per cercare se vi sono punti in cui $f'(x)=0$

$$D\frac{x^2+2x-15}{x^2-5x+4}=\frac{(2x+2)(x^2-5x+4)-(2x-5)(x^2+2x-15)}{(x^2-5x+4)^2}=\frac{-7x^2+38x-67}{(x^2-5x+4)^2}$$

E poiché l’equazione $-7x^2+38x-67=0$ non ha soluzioni avendo Δ<0, la curva non ha punti stazionari.