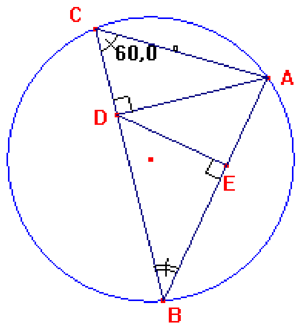
PROBLEMA 1

Nella circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo ABC, con $A\hat{C}B = \frac{\pi}{3}$; sia D la proiezione di A sul segmento CB ed E la proiezione di D su AB.

a) Esprimere in funzione dell'angolo $A\hat{B}C$ il rapporto $f(x) = \dfrac{\overline{EB} - \overline{BD} + \overline{ED}}{\overline{AC}}$, trovare i limiti geometrici dell'incognita, e stabilire se in tali estremi la funzione è continua.



a) AB lato del triangolo equilatero perché il suo angolo alla circonferenza $A\hat{C}B = \frac{\pi}{3}$ quindi

$\overline{AB} = r\sqrt{3}$, inoltre se $A\hat{B}C = x$

$\overline{AC} = 2r\,senx$ per il teorema della corda, $B\hat{A}C = \frac{2}{3}\pi - x$ quindi

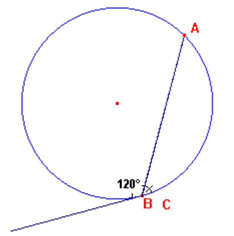
$\overline{BC} = 2r\,sen\left(\frac{2}{3}\pi - x\right)$, $\overline{AD} = r\sqrt{3}\cdot senx$, $\overline{BD} = r\sqrt{3}\cdot\cos x$,

$\overline{BE} = r\sqrt{3}\cdot\cos x\cdot senx$ e $\overline{ED} = r\sqrt{3}\cdot\cos^2 x$.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}r\cdot\cos x\left(senx - 1 + \cos x\right)}{2r\cdot senx}$$

Casi limite:

per C≡A si ha x=0;
se C ≡B si ha x=120°



La funzione è definita e continua in $x = \frac{\pi}{2}$

mentre non è definita e quindi non è continua per x=0.

b) Calcolare il limite a cui tende $f(x)$ al tendere di C ad A e al tendere di C a B.

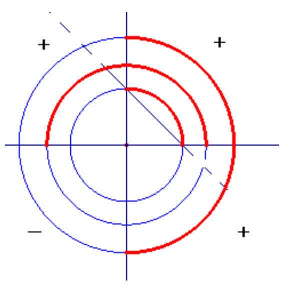
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}\cdot\cos x\left(senx - 1 + \cos x\right)}{2\cdot senx} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}\cdot\cos x}{2}\cdot\left(\frac{senx}{senx} + \frac{-1+\cos x}{senx}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{3}\cdot\cos x}{2}\cdot\left(1 + \frac{\frac{-1+\cos x}{x}}{\frac{senx}{x}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(1 + \frac{0}{1}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il secondo limite, essendo la funzione continua si calcola per sostituzione

$$\lim_{x\to\frac{2}{3}\pi}\frac{\sqrt{3}\cdot\cos x\left(senx - 1 + \cos x\right)}{2\cdot senx} = f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

c) Studiare la funzione $f(x)$ e rappresentarne un grafico probabile in $\left]0;2\pi\right[$



Dominio

$senx \neq 0$ qundi $x \neq k\pi$ nell'intervallo considerato deve essere $x \neq k\pi$

Segno studio il segno dei tre fattori

$senx - 1 + \cos x > 0$

$\cos x > 0$

$senx > 0$

la prima disequazione è una lineare che si studia

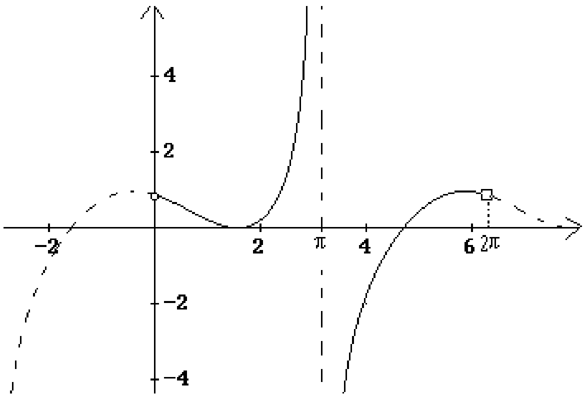
con il sistema $\begin{cases} Y - 1 + X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ o con il metodo dell'angolo aggiunto $\sqrt{2}sen\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > 1$

Limiti

Nei punti di discontinuità x=0 e x=2π il limite assume lo stesso valore per la periodicità ed è stato già calcolato.

$$\lim_{x\to\pi^{\pm}} \frac{\sqrt{3}\cdot\cos x\left(senx-1+\cos x\right)}{2\cdot senx} = \frac{\sqrt{3}\cdot(-1)\left(0-1-1\right)}{2\cdot 0} = \mp\infty$$

dunque $x=\pi$ è un asintoto verticale



d) Considerare la piramide di base ABC, la cui altezza $h=2\sqrt{3}r$ cade in D. Trovare per quale valore di $x=A\hat{B}C$, il volume di tale piramide è uguale a quello di un cubo di lato r, e stabilire se tale piramide è retta.

La piramide non è retta in quanto l'altezza cade nel punto D che non è il centro della circonferenza inscritta nella base.

Il volume si calcola con la formula $V=\frac{1}{3}A_b\cdot h$. Troviamo l'area di base in funzione di x:

$$A_{base}=\frac{1}{2}\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot senA\hat{B}C=\frac{1}{2}r\sqrt{3}\cdot 2rsen\left(\frac{2}{3}\pi-x\right)\cdot senx=r^2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}\cos x+senx\right)\cdot senx$$

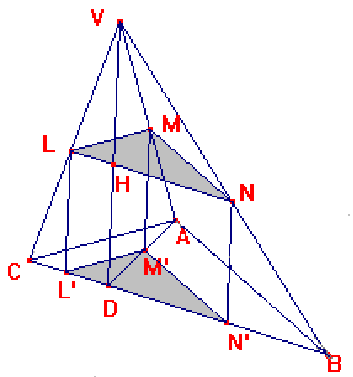
$$V=\frac{1}{3}r^2\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(\sqrt{3}\cos x+senx\right)\cdot senx\cdot 2\sqrt{3}r=r^3\left(\sqrt{3}\cos x\cdot senx+sen^2x\right)$$

Impongo $r^3\left(\sqrt{3}\cos x\cdot senx+sen^2x\right)=r^3$ cioè $\sqrt{3}\cos x\cdot senx+sen^2x=1$

Applicando la relazione fondamentale $\sqrt{3}\cos x\cdot \mathrm{sen}x+\mathrm{sen}^2x=\cos^2x+\mathrm{sen}^2x$ si ottiene una omogenea di secondo grado

$\sqrt{3}\cos x\cdot senx-\cos^2x=0$ che nell'intervallo $\left]0;2\pi\right[$ ha le due soluzioni $x=\frac{\pi}{2}$ e $x=\frac{\pi}{6}$. Quest'ultima è la minore dunque la soluzione cercata.

e) Considerata la minore delle soluzioni trovate nel punto d, condurre un piano parallelo alla base della piramide a distanza 2r dal vertice, e trovare l'area totale del prisma che ha per basi la sezione e la sua proiezione sul piano di base.



Secondo l'ipotesi $\overline{VH}=2r$,

Per il teorema sulle sezioni parallele al piano di base vale la seguente proporzione:

$$\overline{VD}:\overline{VH}=2p(ABC):2p(LMN)$$

$$2\sqrt{3}r:2r=(\sqrt{3}+3)r:2p(LMN)$$

quindi:

$$2p(LMN)=\frac{(\sqrt{3}+3)r\cdot 2r}{2\sqrt{3}r}=(1+\sqrt{3})r$$

$$\overline{HD}=2\sqrt{3}r-2r=2r(\sqrt{3}-1)$$

quindi l'area laterale

$$A_{lat}=2p\cdot h=2r(\sqrt{3}-1)\cdot r(\sqrt{3}+1)=2r^2\cdot\left(3-1\right)=4r^2$$

Inoltre per determinare l'area della sezione (area di base del prisma) consideriamo la proporzione:

$$\overline{VD}^2:\overline{VH}^2=area(ABC):area(LMN) \qquad 12r^2:4r^2=\frac{\sqrt{3}r^2}{2}:area(LMN)$$ quindi

$$area(LMN)=\frac{3\sqrt{3}r^2}{2} \qquad A_{tot\ prisma}=\frac{3\sqrt{3}r^2}{2}\cdot 2+4r^2==\left(3\sqrt{3}+4\right)r^2$$