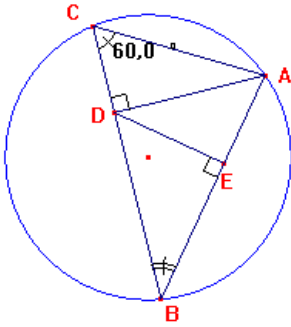


PROBLEMA 1

Nella circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo ABC, con $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$; sia D la proiezione di A sul segmento CB ed E la proiezione di D su AB.

a) Esprimere in funzione dell'angolo \widehat{ABC} il rapporto $f(x) = \frac{\overline{EB} - \overline{BD} + \overline{ED}}{\overline{AC}}$, trovare i limiti geometrici dell'incognita, e stabilire se in tali estremi la funzione è continua.



a) AB lato del triangolo equilatero perché il suo angolo alla circonferenza $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{3}$ quindi

$$\overline{AB} = r\sqrt{3}, \text{ inoltre se } \widehat{ABC} = x$$

$$\overline{AC} = 2r \operatorname{sen} x \text{ per il teorema della corda, } \widehat{BAC} = \frac{2}{3}\pi - x \text{ quindi}$$

$$\overline{BC} = 2r \operatorname{sen} \left(\frac{2}{3}\pi - x \right), \overline{AD} = r\sqrt{3} \cdot \operatorname{sen} x, \overline{BD} = r\sqrt{3} \cdot \cos x,$$

$$\overline{BE} = r\sqrt{3} \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x \text{ e } \overline{ED} = r\sqrt{3} \cdot \cos^2 x.$$

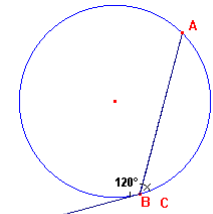
$$f(x) = \frac{\sqrt{3}r \cdot \cos x (\operatorname{sen} x - 1 + \cos x)}{2r \cdot \operatorname{sen} x}$$

La funzione è definita e continua in $x = \frac{\pi}{2}$

mentre non è definita e quindi non è continua per $x=0$.

Casi limite:

per $C \equiv A$ si ha $x=0$;
se $C \equiv B$ si ha $x=120^\circ$



b) Calcolare il limite a cui tende $f(x)$ al tendere di C ad A e al tendere di C a B.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x (\operatorname{sen} x - 1 + \cos x)}{2 \cdot \operatorname{sen} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x}{2} \cdot \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x} + \frac{-1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x}{2} \cdot \left(1 + \frac{-1 + \cos x}{\frac{x}{\operatorname{sen} x}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{0}{1} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Il secondo limite, essendo la funzione continua si calcola per sostituzione

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{3}\pi} \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x (\operatorname{sen} x - 1 + \cos x)}{2 \cdot \operatorname{sen} x} = f\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3 - \sqrt{3}}{4}$$

c) Studiare la funzione $f(x)$ e rappresentarne un grafico probabile in $]0; 2\pi [$

Dominio

$\operatorname{sen} x \neq 0$ quindi $x \neq k\pi$ nell'intervallo considerato deve essere $x \neq k\pi$

Segno studio il segno dei tre fattori

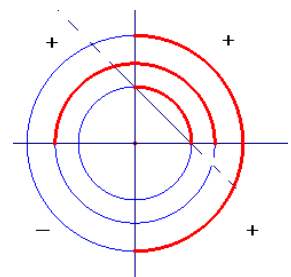
$$\operatorname{sen} x - 1 + \cos x > 0$$

$$\cos x > 0$$

$$\operatorname{sen} x > 0$$

la prima disequazione è una lineare che si studia

con il sistema $\begin{cases} Y - 1 + X > 0 \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ o con il metodo dell'angolo aggiunto $\sqrt{2} \operatorname{sen} \left(x + \frac{\pi}{4} \right) > 1$

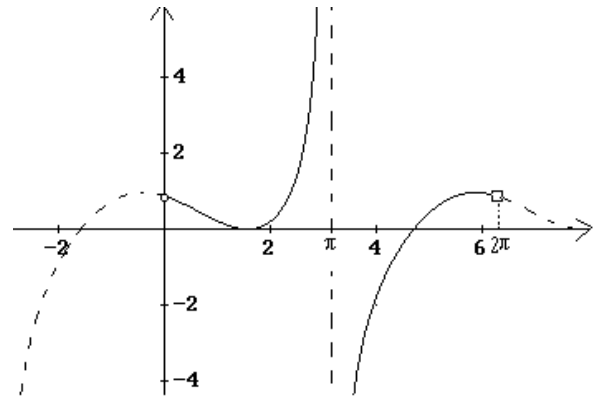


Limiti

Nei punti di discontinuità $x=0$ e $x=2\pi$ il limite assume lo stesso valore per la periodicità ed è stato già calcolato.

$$\lim_{x \rightarrow \pi^{\pm}} \frac{\sqrt{3} \cdot \cos x (\sin x - 1 + \cos x)}{2 \cdot \sin x} = \frac{\sqrt{3} \cdot (-1) (0 - 1 - 1)}{2 \cdot 0} = \mp \infty$$

dunque $x = \pi$ è un asintoto verticale



- d) Considerare la piramide di base ABC, la cui altezza $h = 2\sqrt{3}r$ cade in D. Trovare per quale valore di $x = \hat{A}BC$, il volume di tale piramide è uguale a quello di un cubo di lato r , e stabilire se tale piramide è retta.

La piramide non è retta in quanto l'altezza cade nel punto D che non è il centro della circonferenza inscritta nella base.

Il volume si calcola con la formula $V = \frac{1}{3} A_b \cdot h$. Troviamo l'area di base in funzione di x :

$$A_{base} = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \sin \hat{A}BC = \frac{1}{2} r \sqrt{3} \cdot 2r \sin \left(\frac{2}{3}\pi - x \right) \cdot \sin x = r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3} \cos x + \sin x) \cdot \sin x$$

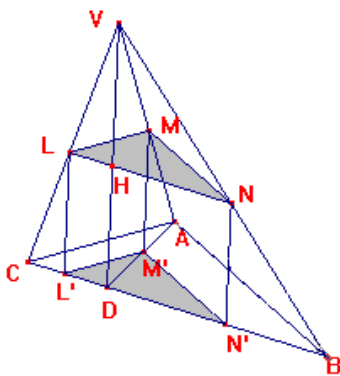
$$V = \frac{1}{3} r^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (\sqrt{3} \cos x + \sin x) \cdot \sin x \cdot 2\sqrt{3}r = r^3 (\sqrt{3} \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x)$$

Impongo $r^3 (\sqrt{3} \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x) = r^3$ cioè $\sqrt{3} \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x = 1$

Applicando la relazione fondamentale $\sqrt{3} \cos x \cdot \sin x + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x$ si ottiene una omogenea di secondo grado

$\sqrt{3} \cos x \cdot \sin x - \cos^2 x = 0$ che nell'intervallo $]0; 2\pi[$ ha le due soluzioni $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{\pi}{6}$. Quest'ultima è la minore dunque la soluzione cercata.

- e) Considerata la minore delle soluzioni trovate nel punto d, condurre un piano parallelo alla base della piramide a distanza $2r$ dal vertice, e trovare l'area totale del prisma che ha per basi la sezione e la sua proiezione sul piano di base.



Secondo l'ipotesi $\overline{VH} = 2r$,

Per il teorema sulle sezioni parallele al piano di base vale la seguente proporzione:

$$\overline{VD} : \overline{VH} = 2p(ABC) : 2p(LMN)$$

$$2\sqrt{3}r : 2r = (\sqrt{3} + 3)r : 2p(LMN)$$

quindi:

$$2p(LMN) = \frac{(\sqrt{3} + 3)r \cdot 2r}{2\sqrt{3}r} = (1 + \sqrt{3})r$$

$$\overline{HD} = 2\sqrt{3}r - 2r = 2r(\sqrt{3} - 1)$$

quindi l'area laterale

$$A_{lat} = 2p \cdot h = 2r(\sqrt{3} - 1) \cdot r(\sqrt{3} + 1) = 2r^2 \cdot (3 - 1) = 4r^2$$

Inoltre per determinare l'area della sezione (area di base del prisma) consideriamo la proporzione:

$$\overline{VD}^2 : \overline{VH}^2 = \text{area}(ABC) : \text{area}(LMN) \quad 12r^2 : 4r^2 = \frac{\sqrt{3}r^2}{2} : \text{area}(LMN) \quad \text{quindi}$$

$$\text{area}(LMN) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2} \quad A_{tot\ prisma} = \frac{3\sqrt{3}r^2}{2} \cdot 2 + 4r^2 = (3\sqrt{3} + 4)r^2$$