QUESITI

1. Stabilire se la curva che rappresenta $y = \dfrac{1 - \cos x + senx}{senx}$ ha dei punti stazionari e trovare la tangente a tale curva nel suo punto di ascissa $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Il dominio della funzione si trova ponendo $senx \neq 0$, quindi è $x \neq k\pi$.
La funzione ha punti stazionari se vi sono x∈D per i quali $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = \frac{(senx + \cos x)\, senx - \cos x(1 - \cos x + senx)}{sen^2 x} = \frac{sen^2 x + senx\cos x - \cos x + \cos^2 x - \cos x senx}{sen^2 x} = \frac{1 - \cos x}{sen^2 x}$$

$\dfrac{1 - \cos x}{sen^2 x} = 0$ per $\cos x = 1$ ovvero $x = 2k\pi$ che sono però valori esclusi dal dominio, quindi f non ha punti stazionari.

In $x = \dfrac{\pi}{2}$ l'ordinata del punto è $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1 - 0 - 1}{1} = 2$ e $m = f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{1 - 0}{1} = 1$,

la tangente è quindi $y - 2 = 1\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right)$ cioè $y = x - \dfrac{\pi}{2} + 2$

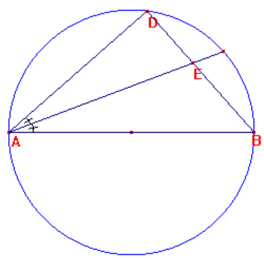
2. Si dimostri che $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) + \ln(1 - x)}{\cos x - 1} = 2$

Applicando le proprietà dei logaritmi e i limiti notevoli si ha

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - n(1 - x)}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 - x^2)}{\cos x - 1} = \lim_{x \to 0} \frac{\dfrac{\ln(1 - x^2)}{x^2}}{\dfrac{\cos x - 1}{x^2}} = \frac{-1}{-\dfrac{1}{2}} = 2$$

3. In una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ inscrivere il triangolo ABD retto in D. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento BD in E. Indicato con x l'angolo $B\hat{A}E$, determinare il rapporto $y = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$. Calcolare il rapporto y per x tendente a zero.

Pongo $D\hat{A}B = 2x$, quindi nel triangolo rettangolo ADB si ha $\overline{DB} = 2r \cdot sen2x$.



Per il teorema dell'angolo esterno di un triangolo $A\hat{E}B = \dfrac{\pi}{2} + x$,

per il teorema dei seni $\dfrac{\overline{BE}}{senx} = \dfrac{\overline{AB}}{sen\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right)}$, $\overline{BE} = \dfrac{2rsenx}{\cos x}$

$$y = \frac{\overline{BE}}{\overline{BD}} = \frac{2rsenx}{\cos x} \cdot \frac{1}{2senx\cos x \cdot 2r} = \frac{1}{2\cos^2 x} \text{ e quindi } \lim_{x \to 0} \frac{1}{2\cos^2 x} = \frac{1}{2}$$

4. Definire gli asintoti orizzontale, obliquo e verticale di una curva e fornire un esempio di espressione analitica di una funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Vedere libro per le definizioni.

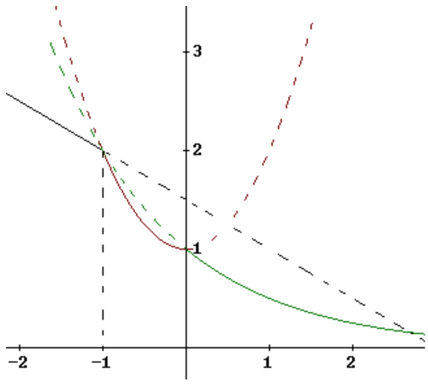
5. Individua i valori dei parametri reali a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{3}{2} & \text{per} \quad x \leq -1 \\ x^2 - 2a & \text{per} \quad -1 < x \leq 0 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+b} & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$$

sia continua nel suo dominio. Successivamente costruisci il grafico della funzione e determina, se esistono, il massimo, il minimo, l'estremo superiore e quello inferiore dei valori $f(x)$.

Perché f sia continua in $x=-1$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(ax+\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{3}{2}-a\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\left(x^2-2a\right)=1-2a\end{array}\right\}\to\ \frac{3}{2}-a=1-2a\to\quad a=-\frac{1}{2}$$



Perché f f sia continua in $x=0$

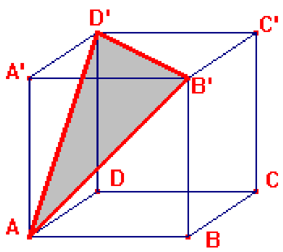
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x^2-2a\right)=-2a=1\\ \lim\limits_{x\to -0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+b}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{b}\end{array}\right\}\to\ \left(\frac{1}{2}\right)^{b}=1\to\quad b=0$$

Osservando il grafico vediamo che il codominio è $C=\left]0,+\infty\right[$, non esistono né il massimo né il minimo, la funzione non è superiormente limitata, mentre ha estremo inferiore ed è 0.

6. Si consideri la seguente proposizione: "Due rette nello spazio sono sghembe se non hanno alcun punto in comune". Dire se tale proposizione è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione.

La proposizione è falsa, infatti due rette sono sghembe se non sono complanari (cioè non esiste un piano che le contiene entrambe), mentre due rette che non hanno alcun punto in comune possono anche essere parallele. Quindi se due rette sono sghembe non hanno alcun punto in comune, mentre se non hanno alcun punto in comune non è detto che siano sghembe.

7. Nel cubo $ABCDA'B'C'D'$, i segmenti AA', BB', CC' e DD' rappresentano quattro spigoli paralleli.. Descrivere le caratteristiche del triangolo $AB'D'$ e calcolarne l'area in funzione dello spigolo s del cubo. Calcolare inoltre il rapporto tra il volume della piramide $AA'B'D'$ e quello del cubo stesso.

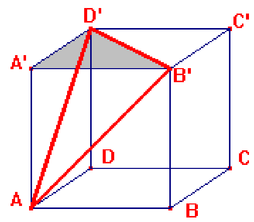


Il triangolo AB'D' è equilatero essendo i lati uguali in quanto tutti diagonali di quadrati congruenti (le facce del cubo).

$$A_{AB'D'}=\left(s\sqrt{2}\right)\cdot\left(s\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}s^2$$

Per calcolare il volume della piramide $AA'B'D'$ convie con base A'B'D'

$$V_{AA'B'D'}=\frac{s^2}{2}\cdot s\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}s^3=\frac{1}{6}V_{cubo}$$



8. Si stabiliscano i valori dei parametri a e b affinché la curva di equazione $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+1}{2x-1}$ ammetta come asintoto obliquo la retta $y=x+2$. Disegnare il grafico probabile della funzione così ottenuta.

Dall'equazione della retta si deduce $m=1$. Determino il coefficiente angolare dell'asintoto obliquo

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^2+bx+1}{2x-1}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{a}{2}\qquad\text{allora}\quad\frac{a}{2}=1\qquad a=2$$

Dall'equazione della retta si deduce $q=2$. Determino l'ordinata all'origine dell'asintoto obliquo

$$q=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx+1}{2x-1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+bx+1-2x^2+x}{2x-1}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(b+1+\dfrac{1}{x}\right)}{x\left(2-\dfrac{1}{x}\right)}=\frac{b+1}{2}$$

Quindi $\dfrac{b+1}{2}=2\qquad b=3$

La funzione da studiare è quindi $y = \dfrac{2x^2+3x+1}{2x-1}$

<u>dominio</u> $\quad D = \left(-\infty;\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

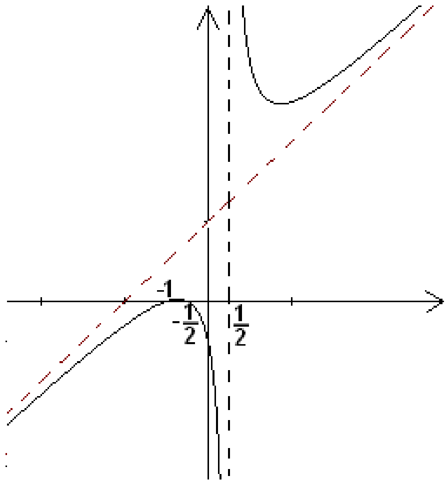
<u>Segno</u>:

$N \geq 0 \quad 2x^2+3x+1 \geq 0 \quad x \leq -1 \vee x \geq -\frac{1}{2}$

$D > 0 \quad 2x-1 > 0 \Rightarrow \quad x > +\frac{1}{2}$

		-1		$-\frac{1}{2}$		$+\frac{1}{2}$	
N	+	0	-	0	+		+
D	-		-		-	0	+
N/D	-	0	+	0	-	∄	+

Le <u>intersezioni</u> con l'asse x sono (-1,0) e ($-\frac{1}{2}$,0), e quella con l'asse y è (0;-1)



<u>Limiti</u>:
per $x \to \pm\infty$ non occorre calcolare i limiti perché l'asintoto obliquo è noto

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^{\pm}} \frac{2x^2+3x+1}{2x-1} = \frac{3}{0} = \pm\infty \qquad \text{qundi } x = \frac{1}{2} \text{ è asintoto verticale}$$

9. Mediante la definizione ricavare la derivata della funzione $f(x) = \sqrt{3-x}$.

Bisogna calcolare il limite del rapporto incrementale

$$f(x+h) = \sqrt{3-(x+h)}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{3-(x+h)}-\sqrt{3-x}}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3-(x+h)}-\sqrt{3-x}}{h} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

Razionalizzo il numeratore per risolvere la forma indeterminata:

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{3-(x+h)}-\sqrt{3-x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}}{\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{3-(x+h)-(3-x)}{\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{\sqrt{3-(x+h)}+\sqrt{3-x}} = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$$

10. Stabilire, motivando la risposta, se il teorema degli zeri è applicabile alla funzione $y = \sqrt{4-x} - \ln x^2$ sull'intervallo $[1;3]$ .Trovare, inoltre, un intervallo in cui il teorema non è applicabile a tale funzione, specificando quale ipotesi non è soddisfatta.

<u>Dominio</u> $\quad \begin{cases} x^2 > 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad D = (-\infty;0) \cup (0;4]$ la funzione è continua nell'intervallo perché $[1;3] \subset D$.

Calcolo i valori negli estremi per verificare la seconda ipotesi:

$f(1) = \sqrt{3} > 0$ e $f(3) = 1 - \ln 9 < 0$, allora il teorema degli zeri è applicabile nell'intervallo $[1;3]$.

Un intervallo in cui il teorema non è applicabile è $[-1;3]$, perché non è soddisfatta l'ipotesi della continuità visto che l'intervallo contiene $x = 0$, punto di discontinuità,

Un altro esempio è l'intervallo $(0;4]$ in cui la funzione è continua ma l'intervallo è aperto a sinistra.

Nell'intervallo $[1;2]$ il teorema non è applicabile perché non è verificata la seconda ipotesi, visto che negli estremi la funzione assume valori concordi: $f(1) = \sqrt{3} > 0$ e $f(2) = \sqrt{2} - \ln 4 > 0$.