Liceo Scientifico Leonardo da Vinci

PROVA DI MATEMATICA CLASSI QUINTE

18/02/10

Il candidato risolva, a sua scelta, uno dei due problemi e risponda a cinque dei dieci quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

In un cerchio di raggio $r = 1$ e centro *O* è inscritto un quadrilatero *ABCD* contenente *O*. Sapendo che *AB* è uguale al lato del triangolo equilatero inscritto, che *CD* è uguale al raggio, e posto $B\hat{O}C = 2x$,

a. Verificare che *AC* e *BD* sono perpendicolari ed esprimere in funzione di *x* l'area del quadrilatero, $A = f(x)$.
b. Verificato che $A = f(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3} + 4\sin x\cos x\right)$, trovare per quale valore di *x*, nei limiti geometrici, il grafico di *f(x)* ha tangente parallela all'asse delle ascisse e costruire il quadrilatero nel caso della soluzione trovata.
c. Dopo aver verificato che in tale caso *ABCD* è un trapezio, considerare *ABCD* come base di una piramide avente altezza $\overline{VO} = 2$ e calcolarne il volume.
d. Individuare la caratteristica comune delle facce laterali e determinare per una di esse, a scelta, l'area e la distanza del piano che la contiene dal centro *O* della circonferenza.
e. Tornando al quadrilatero iniziale, stabilire se vi è un valore di *x* per cui *ABCD* possa essere base di una piramide retta.

PROBLEMA 2

Data l'equazione

$$(m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2 = 0\,, \qquad m \in \mathbb{R}$$

a. Si determini per quali valori di *m* essa ammette soluzioni reali e si ricavi il parametro *m* in funzione della *x*, si tracci poi il grafico della funzione ottenuta
b. Posto

(*) $$y = (m+1)x^2 - 2(m-1)x + m - 2\,,$$

si risolva il sistema che si ottiene attribuendo a *m* i valori particolari $m = 0$ e $m = -2$, e si mostri che la soluzione ottenuta soddisfa la (*), qualunque sia il valore di *m*. Si disegnino le due parabole corrispondenti ai precedenti valori particolari del parametro *m* e si verifichi che esse sono tangenti nel loro punto comune.
c. Trovare l'equazione della retta tangente alle parabole nel loro punto comune e determinare, in gradi primi e secondi, l'angolo che tale tangente forma con l'asse delle ascisse.
d. Si dimostri che le due parabole precedenti staccano su una qualunque retta passante per il punto comune, salvo la retta $x = 1$, due corde uguali.
e. Determinare l'equazione cartesiana del luogo geometrico del punto medio del segmento staccato dalla retta del quesito precedente sulla parabola ottenuta per $m = -2$, e verificare che appartiene al fascio (*).

QUESTIONARIO

1. Quali tra le seguenti espressioni sono prive di significato in **R**? Motivare la risposta.

a) $\operatorname{sen}\left(\ln e^{-2\pi}\right)$

b) $\ln(\cos(-4\pi))$

c) $\log_{\sqrt{1-x^2}}(x-1)$

d) $\sqrt{-\log_{\frac{1}{3}} 8}$

e) $\operatorname{arcsen}\left(x^2+2\right)$

2. Una pallina si muove lungo una retta (asse *y*) seguendo la legge oraria $y(t)=2\cos(\omega \cdot t+\varphi)$, dove *t* rappresenta il tempo (misurato in secondi) e ω e φ sono costanti, con $-\pi<\varphi<0$ e $0<\omega<\pi$.

a) Determinare il valore delle costanti ω e φ sapendo che all'istante $t=0$ la pallina si trova in $y=1$ e all'istante $t=1$ si trova in $y=2$.

b) Determinare gli intervalli nel primo periodo in cui la velocità è positiva.

3. Tra le seguenti funzioni individuare quelle dispari, motivando la risposta:

a) $f(x)=\dfrac{x^4+x^2}{senx}$

b) $f(x)=x^3+x+1$

c) $f(x)=\dfrac{\cos x}{\ln x}$

d) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

e) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{|x|}$

4. Data la funzione $y=\begin{cases} \dfrac{sen2x}{4x} & se \quad x<0 \\ \sqrt{x^2+a} & se \quad x\geq 0 \end{cases}$ con $a\in R$

Determinare per quale valore del parametro *a* la funzione è continua in *x=0.*

È applicabile il teorema di esistenza degli zeri nell'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{1}{2}\right]$?

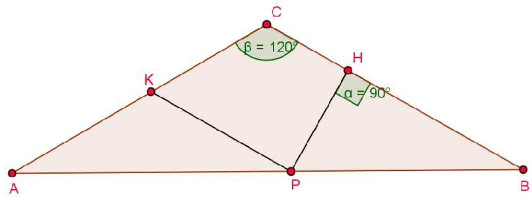
Puoi affermare con certezza che esistono o non esistono zeri della funzione?

5. In un parallelepipedo rettangolo le dimensioni della base stanno tra loro come 3:2. Sapendo che la somma delle tre dimensioni è 25cm e che la superficie laterale è 300cm^2, calcolare le tre dimensioni.

6. Siano date le funzioni $f(x) = x^2 - 3x + 3$ e $g(x) = x^3 - 11x + 15$. Risolvere l'equazione $f'(x) = g'(x)$ e sia x_0 la soluzione nell'intervallo [0,4]. Che cosa si può dedurre relativamente ai grafici di f e di g nel punto x_0?

7. Se $f(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + 15x + 50$ con $a \in \Re$, sapendo che $(x+2)$ è un fattore di *f(x),* calcolare a. Sapendo, inoltre, che $f(5) = 0$ sviluppare *f(x)* in fattori di 1° grado. Determinare il segno di *f(x).*

8. Il triangolo isoscele ABC in figura ha base $AB = 2$ e angolo al vertice di 120°; il punto P è un generico punto del lato AB, il segmento PK è parallelo al lato BC e H è la proiezione ortogonale di P sul lato BC. Posto *AP=2x* esprimere in funzione di *x* il rapporto tra le aree dei triangoli PHC e PKC e classificare le discontinuità della funzione ottenuta.



9. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, determinarne la derivata in un generico punto x_0 del suo dominio mediante la definizione.

10. Quale potrebbe essere l'espressione analitica della funzione rappresentata a fianco? Motivare esaurientemente se ciascuna di esse può o non può essere rappresentata dal grafico.

$a)\ y = \dfrac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$ $\qquad c)\ y = \dfrac{x^2 + 1}{x - 1}$

$b)\ y = \dfrac{x^2 + 1}{x^3 - 1}$ $\qquad d)\ y = \sqrt{\dfrac{x^3 + 1}{x - 1}}$