Liceo Scientifico Leonardo da Vinci
PROVA DI MATEMATICA CLASSI QUINTE

08/02/2011

Il candidato risolva, a sua scelta, uno dei seguenti problemi e risponda a cinque quesiti del questionario:

PROBLEMA 1

1) Nella circonferenza di raggio r è inscritto un triangolo ABC, con $A\hat{C}B = \frac{\pi}{3}$; sia D la proiezione di A sul segmento CB ed E la proiezione di D su AB.

a) Esprimere in funzione dell'angolo $A\hat{B}C$ il rapporto $f(x) = \frac{\overline{EB} - \overline{BD} + \overline{ED}}{\overline{AC}}$, trovare i limiti geometrici dell'incognita, e stabilire se in tali estremi la funzione è continua.

b) Calcolare il limite a cui tende $f(x)$ al tendere di C ad A e al tendere di C a B.

c) Studiare la funzione $f(x)$ e rappresentarne un grafico probabile in $]0; 2\pi[$

d) Considerare la piramide di base ABC, la cui altezza $h = 2\sqrt{3}r$ cade in D. Trovare per quale valore di $x = A\hat{B}C$, il volume di tale piramide è uguale a quello di un cubo di lato r, e stabilire se tale piramide è retta.

e) Considerata la minore delle soluzioni trovate nel punto d, condurre un piano parallelo alla base della piramide a distanza 2r dal vertice, e trovare l'area totale del prisma che ha per basi la sezione e la sua proiezione sul piano di base.

PROBLEMA 2

Si considerino la parabola di equazione $y = ax^2 - \frac{7}{3}x$ e l'iperbole di equazione $y = \frac{x-b}{d-x}$

a) Dopo aver determinato i parametri $a,\ b,\ d$ in modo che le curve che le rappresentano passino per il punto comune $A(1;-2)$ e che l'iperbole abbia asintoto verticale di equazione $x = 4$, calcolare le coordinate dei punti B e C, ulteriori punti comuni fra le curve date, con $x_B < x_C$.

b) Determinare l'equazione della retta t tangente alla parabola in B e l'equazione della retta s tangente all'iperbole in C.

c) Considerato il generico punto P appartenente all'arco AB dell'iperbole, esprimere in funzione dell'ascissa di P il rapporto $y = |f(x)| = \sqrt{10}\frac{\overline{PH}}{\overline{PK}}$, con $\overline{PH}$ distanza di P dalla tangente t e $\overline{PK}$ distanza di P dalla retta verticale passante per A.

d) Verificato che risulta $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 5x + 4}$, disegnare il grafico probabile di $y = f(x)$ e da questo ricavare il grafico di $y = |f(x)|$, evidenziando il tratto relativo alle limitazioni geometriche del problema.

e) Dimostrare analiticamente che il grafico di $y = f(x)$ non ha punti stazionari.

QUESITI

1. Stabilire se la curva che rappresenta $y = \dfrac{1 - \cos x + senx}{senx}$ ha dei punti stazionari e trovare la tangente a tale curva nel suo punto di ascissa $x = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Si dimostri che $\lim_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{\cos x - 1} = 2$

3. In una circonferenza di diametro $\overline{AB} = 2r$ inscrivere il triangolo ABD retto in D. Tracciare la bisettrice dell'angolo $D\hat{A}B$: tale bisettrice intersechi il segmento BD in E. Indicato con x l'angolo $B\hat{A}E$, determinare il rapporto $y = \dfrac{\overline{BE}}{\overline{BD}}$. Calcolare il rapporto y per x tendente a zero.

4. Definire gli asintoti orizzontale, obliquo e verticale di una curva e fornire un esempio di espressione analitica di una funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

5. Individua i valori dei parametri reali a e b in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax + \dfrac{3}{2} & \text{per} \quad x \le -1 \\ x^2 - 2a & \text{per} \quad -1 < x \le 0 \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x+b} & \text{per} \quad x > 0 \end{cases}$$

sia continua nel suo dominio. Successivamente costruisci il grafico della funzione e determina, se esistono, il massimo, il minimo, l'estremo superiore e quello inferiore dei valori $f(x)$.

6. Si consideri la seguente proposizione: "Due rette nello spazio sono sghembe se non hanno alcun punto in comune". Dire se tale proposizione è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione.

7. Nel cubo $ABCDA'B'C'D'$, i segmenti AA', BB', CC' e DD' rappresentano quattro spigoli paralleli.. Descrivere le caratteristiche del triangolo $AB'D'$ e calcolarne l'area in funzione dello spigolo *s* del cubo. Calcolare inoltre il rapporto tra il volume della piramide $AA'B'D'$ e quello del cubo stesso.

8. Si stabiliscano i valori dei parametri *a* e *b* affinché la curva di equazione $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + 1}{2x - 1}$ ammetta come asintoto obliquo la retta $y = x + 2$. Disegnare il grafico probabile della funzione così ottenuta.

9. Mediante la definizione ricavare la derivata della funzione $y = \sqrt{3 - x}$.

10. Stabilire, motivando la risposta, se il teorema degli zeri è applicabile alla funzione $y = \sqrt{4 - x} - \ln x^2$ sull'intervallo $[1;3]$ .Trovare, inoltre, un intervallo in cui il teorema non è applicabile a tale funzione, specificando quale ipotesi non è soddisfatta.