TEST DI FINE UNITÀ

pag 109 modulo U

1. la risposta giusta è A perché $\lim_{x\to b^+} f(x) = 1$ è un limite finito, vero in un intorno destro di b. Infatti $|f(x) - 1| < \varepsilon$ indica un intorno completo di 1 sull'asse delle ordinate, a cui corrisponde $b < x < b + k$, che è un intorno destro di b sull'asse delle ascisse.

2. La risposta giusta è la C perché $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$ è un limite infinito per x compreso in un intorno sinistra di b. Infatti $f(x) > k$ indica un intorno di $+\infty$ sull'asse delle ordinate, a cui corrisponde $b - m < x < b$, che è un intorno sinistro di b sull'asse delle ascisse.

3. La risposta giusta è la D perché $\lim_{x\to +\infty} \left(4 - x^4\right) = -\infty$ è un limite infinito per x che tende ad un valore infinito. Infatti $4 - x^4 < -m$ indica un intorno di $-\infty$ sull'asse delle ordinate a cui corrisponde $x > c_m$ che è un intorno di $+\infty$ sull'asse delle ascisse.

4. La risposta giusta è la A, infatti $\lim_{x\to 1} \frac{x^2+1}{x+1} = 1$ è un limite finito per x che tende ad un valore finito. Quindi scelto ad arbitrio $\varepsilon > 0$ la disequazione $\left|\frac{x^2+1}{x+1} - 1\right| < \varepsilon$ ha sicuramente come soluzione un intorno completo di 1, $I(1)$. Inoltre, per sostituzione, si può osservare facilmente che il limite è vero.

5. La risposta giusta è la C, infatti $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$ è un limite infinito per x che tende ad un valore finito, inoltre esso è un limite sinistro. Quindi scelto ad arbitrio $m > 0$ bisogna dimostrare che la disequazione $\frac{1}{x-1} < -m$ è sicuramente vera in un intorno sinistro di 1, $I^-(1)$.

6. La risposta giusta è la C, infatti per il teorema della permanenza del segno $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ indica che esiste un intorno di 2 in cui la f(x) ha segno positivo, cioè concorde con il suo limite. Le altre affermazioni sono tutte false perché errate.

VERSO L'ESAME DI STATO

QUESITI

1. Se x_0 è di accumulazione per l'insieme A allora:

a) A è un insieme infinito	VERO
b) A può essere un insieme limitato	VERO
c) x_0 deve appartenere ad A	FALSO
d) ogni intorno di x_0 deve contenere almeno un punto di A	FALSO

2. Dal grafico si deducono tutti i limiti indicati e sono:

a) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0^+$

b) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 0^-$

c) $\lim_{x\to 3^+} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1^-$

f) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$

La definizione del caso a) è la seguente:
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c > 0$ tale che $|f(x)| < \varepsilon$ e' vera per $x < -c$
oppure, per essere più precisi visto che è un limite per eccesso:
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c > 0$ tale che $0 < f(x) < \varepsilon$ e' vera per $x < -c$

La definizione del caso b) è la seguente:
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, I^+(1)$ tale che $|f(x)| < \varepsilon$ e' vera per $x \in I^+(1)$
oppure, per essere più precisi visto che è un limite destro per difetto:
$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, I^+(1)$ tale che $-\varepsilon < f(x) < 0$ e' vera per $x \in I^+(1)$

La definizione del caso c) è la seguente:
$\forall\, M > 0 \quad \exists\, I^+(3)$ tale che $f(x) > M$ e' vera per $x \in I^+(3)$.

Problemi

16. La funzione $y = \dfrac{1}{e^{x-1} - 1}$ è trascendente fratta.

a) Per determinare il CE basta porre il denominatore diverso da zero:
$e^{x-1} - 1 \neq 0 \qquad e^{x-1} \neq 1 \qquad e^{x-1} \neq e^0 \qquad x-1 \neq 0 \qquad x \neq 1 \qquad CE \quad (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$

b) segno

$y > 0 \qquad \dfrac{1}{e^{x-1} - 1} > 0$

$e^{x-1} > 1 \qquad e^{x-1} > e^0 \qquad x-1 > 0 \qquad x > 1$

Intersezioni

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{e^{x-1} - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{1}{e^{-1} - 1} = \dfrac{e}{1-e} \simeq -1{,}58 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{1}{e^{x-1} - 1} \end{cases} \qquad \begin{cases} -- \\ 0 = \dfrac{1}{e^{x-1} - 1} \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

A(0;-1,58)

c) La verifica del limite $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ è la seguente:

$$\left|\frac{1}{e^{x-1}-1}\right|<\varepsilon \qquad \frac{1}{\left|e^{x-1}-1\right|}<\varepsilon \qquad e^{x-1}-1>\frac{1}{\varepsilon} \qquad e^{x-1}>1+\frac{1}{\varepsilon} \qquad x-1>\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right) \qquad x>1+\ln\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)$$

che è un intorno di $+\infty$

La verifica del limite $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$ è la seguente:

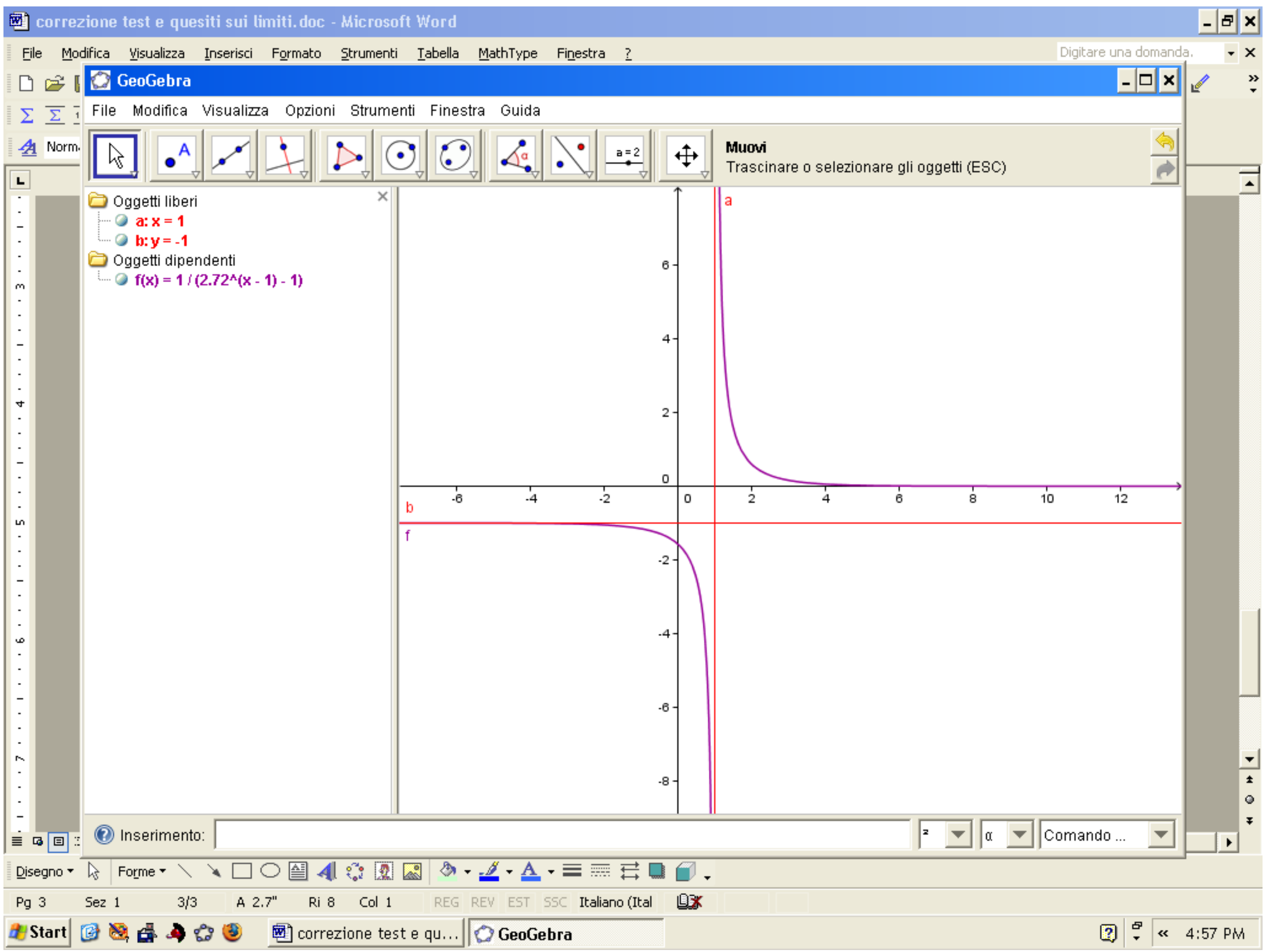
$$\left|\frac{1}{e^{x-1}-1}\right|>M \qquad \frac{1}{\left|e^{x-1}-1\right|}>M \qquad \left|e^{x-1}-1\right|<\frac{1}{M} \qquad -\frac{1}{M}<e^{x-1}-1<\frac{1}{M}$$

$$-\frac{1}{M}<e^{x-1}-1<\frac{1}{M} \qquad 1-\frac{1}{M}<e^{x-1}<1+\frac{1}{M} \qquad \ln\left(1-\frac{1}{M}\right)<x-1<\ln\left(1+\frac{1}{M}\right)$$

$$1+\ln\left(1-\frac{1}{M}\right)<x<1+\ln\left(1+\frac{1}{M}\right)$$

che è un intorno completo di 1, come si può verificare facendo qualche semplice calcolo, cioè sostituendo ad M, per esempio, il valore 10.

Per completezza aggiungo il grafico ottenuto con Geogebra



ci sono due asintoti orizzontali di equazione y=0 e y=-1 e un asintoto verticale di equazione x=1.