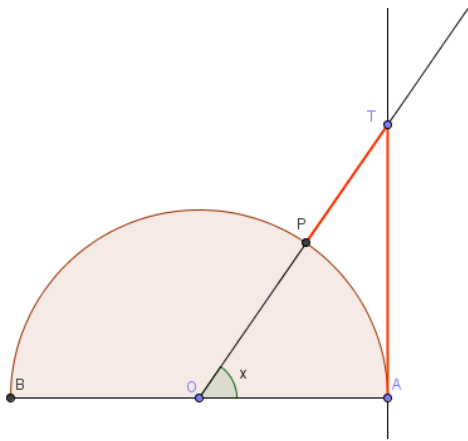


Problema 1

Sia P un punto di un arco AB di una semicirconferenza di centro O e raggio r. Sia T il punto in cui la semiretta OP incontra la

tangente in A all'arco. Porre $x = \widehat{AOT}$ e calcolare i seguenti limiti: $\lim_{P \rightarrow A} \frac{\overline{PT}}{\overline{AT}}$ e $\lim_{P \rightarrow A} \frac{\overline{AP}}{\overline{AT}}$



$x = \widehat{AOT}$
 Limitazioni geometriche
 per $P \rightarrow A$ $x \rightarrow 0$
 per $P \rightarrow B$ $x \rightarrow 180^\circ$ $\Rightarrow 0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ con $x \neq 90^\circ$

Considero il triangolo OAT retto in A con $OA=r$

$$\overline{AT} = \overline{OA} \operatorname{tg}x = r \operatorname{tg}x \quad \overline{OT} = \frac{\overline{OA}}{\cos x} = \frac{r}{\cos x}$$

$$\overline{PT} = \overline{OT} - \overline{OP} = \frac{r}{\cos x} - r = r \frac{1 - \cos x}{\cos x}$$

$$f(x) = \frac{r(1 - \cos x)}{\cos x \cdot r \cdot \operatorname{tg}x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}x}$$

$$\lim_{P \rightarrow A} \frac{\overline{PT}}{\overline{AT}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen}x} = 0$$

Considero la corda AP che sottende l'angolo alla circonferenza che è la metà dell'angolo al centro, quindi vale $\frac{x}{2}$.

Per il teorema della corda $\overline{AP} = 2r \operatorname{sen} \frac{x}{2}$

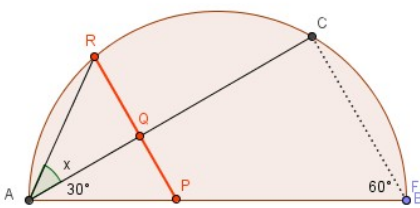
$$g(x) = \frac{2r \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{r \cdot \operatorname{tg}x} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}x}$$

$$\lim_{P \rightarrow A} \frac{\overline{AP}}{\overline{AT}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \frac{x}{\operatorname{sen}x} \cos x = 1$$

Problema 2

Data la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$, sia AC una sua corda di lunghezza $\overline{AC} = r\sqrt{3}$. Considera un punto P su AB e traccia da P la semiretta s perpendicolare ad AC. Detti Q ed R i punti in cui s interseca, rispettivamente, AC e

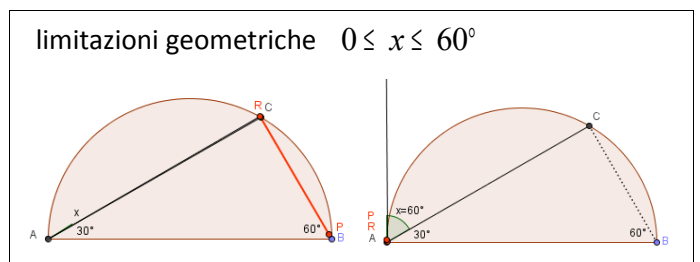
la semicirconferenza e posto $x = \widehat{QAR}$ calcola il seguente limite: $\lim_{P \rightarrow A} \frac{PQ}{QR}$



$\overline{AC} = r\sqrt{3} \Rightarrow$ l'angolo alla circonferenza corrispondente alla corda vale 60°

Il triangolo ABC è retto in C perché inscritto in una semicirconferenza

$x = \widehat{QAR}$



Considero il triangolo AQP retto in Q

$$\overline{QP} = \overline{AP} \operatorname{sen}30^\circ = \frac{\overline{AP}}{2}$$

$$\overline{AQ} = \overline{AP} \cos 30^\circ = \frac{\overline{AP} \sqrt{3}}{2}$$

Considero il triangolo AQR retto in Q $\overline{QR} = \overline{AQ} \operatorname{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AP} \operatorname{tg}x$

$$f(x) = \frac{\overline{AP}}{2} \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} \overline{AP} \operatorname{tg}x} = \frac{1}{\sqrt{3} \operatorname{tg}x}$$

$$\lim_{P \rightarrow A} \frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \lim_{x \rightarrow 60^\circ} \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg}x} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Disegna il grafico probabile della funzione $y = \ln \frac{7x+9}{x-3}$ e, successivamente, ricava il grafico di $y = |f(x)|$.

C.E.

$$\begin{cases} \frac{7x+9}{x-3} > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \quad x < -\frac{9}{7} \vee x > 3 \quad D = \left(-\infty; -\frac{9}{7}\right) \cup (3; +\infty)$$

Zeri

$$\begin{cases} y = \ln \frac{7x+9}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln \frac{7x+9}{x-3} = 0 \\ - - \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7x+9}{x-3} = e^0 \\ - - \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{7x+9}{x-3} = 1 \\ - - \end{cases} \quad \begin{cases} 7x+9 = x-3 \\ - - \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ - - \end{cases} \quad A(-2; 0)$$

Non ci sono intersezioni con l'asse y perché $x = 0 \notin C.E.$

Segno $y > 0$

$$\ln \frac{7x+9}{x-3} > 0 \quad \frac{7x+9}{x-3} > e^0 \quad \frac{7x+9}{x-3} > 1 \quad \frac{7x+9}{x-3} - 1 > 0 \quad \frac{7x+9-x+3}{x-3} > 0 \quad \frac{6x+12}{x-3} > 0$$

I.P. $x < -2 \vee x > 3$

Limiti e asintoti

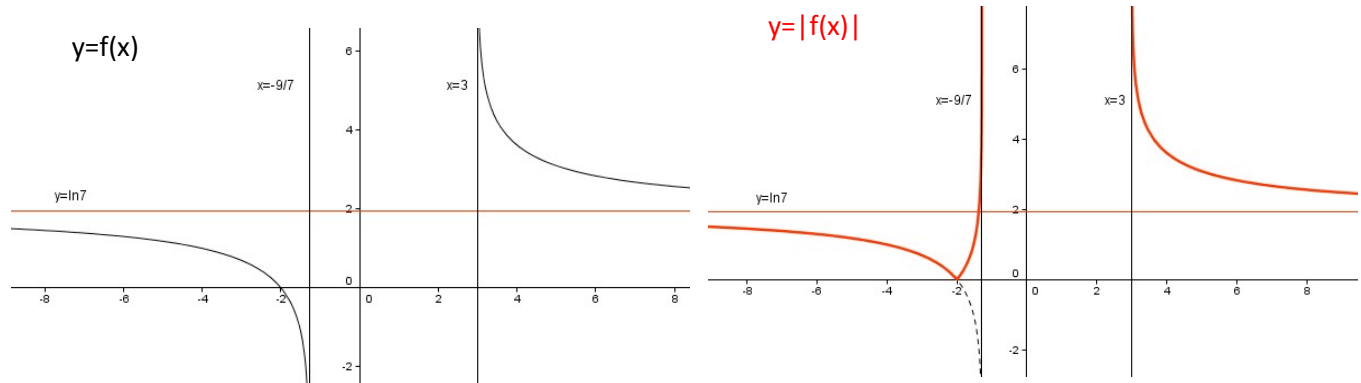
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln \frac{7x+9}{x-3} = \ln \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{7x+9}{x-3} = \ln \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \left(7 + \frac{9}{x}\right)}{x \left(1 - \frac{3}{x}\right)} = \ln 7 \approx 1,9 \quad y = \ln 7 \text{ asintoto orizzontale}$$

Intersezioni con l'asintoto orizzontale

$$\begin{cases} y = \ln \frac{7x+9}{x-3} \\ y = \ln 7 \end{cases} \quad \ln \frac{7x+9}{x-3} = \ln 7 \quad \frac{7x+9}{x-3} = 7 \quad 7x+9 = 7(x-3) \text{ impossibile}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{9}{7}^-} \ln \frac{7x+9}{x-3} = \ln \lim_{x \rightarrow -\frac{9}{7}^-} \frac{7x+9}{x-3} = \ln \frac{0^-}{-\frac{9}{7}-3} = \ln 0^+ = -\infty \quad x = -\frac{9}{7} \text{ asintoto verticale sinistro}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln \frac{7x+9}{x-3} = \ln \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{7x+9}{x-3} = \ln \frac{21+9}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty \quad x = 3 \text{ asintoto verticale destro}$$



Disegna il grafico probabile della funzione $y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 2}$ e, successivamente, ricava il grafico di $y = |f(x)|$.

C.E.

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \quad x \leq -1 \vee x \geq 4 \wedge x \neq -2 \quad D = (-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [4; +\infty)$$

Zeri

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 2} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ - - \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \quad A(-1; 0) \quad B(4; 0)$$

Non ci sono intersezioni con l'asse y perché $x = 0 \notin C.E.$

Segno $y > 0 \quad x > -2$

Limiti e asintoti

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 2} = \frac{\sqrt{6}}{0^+} = \pm \infty \quad x = -2 \text{ asintoto verticale}$$

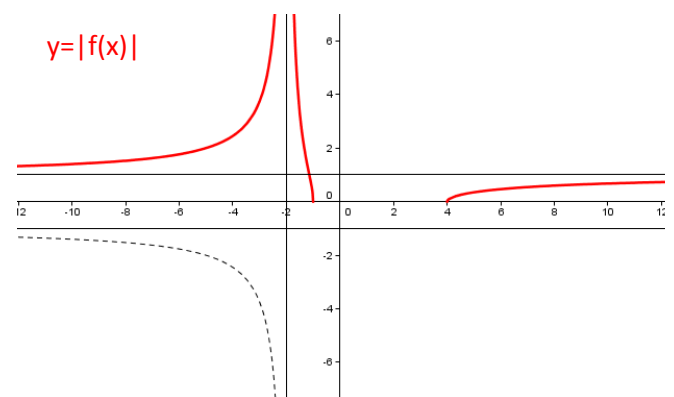
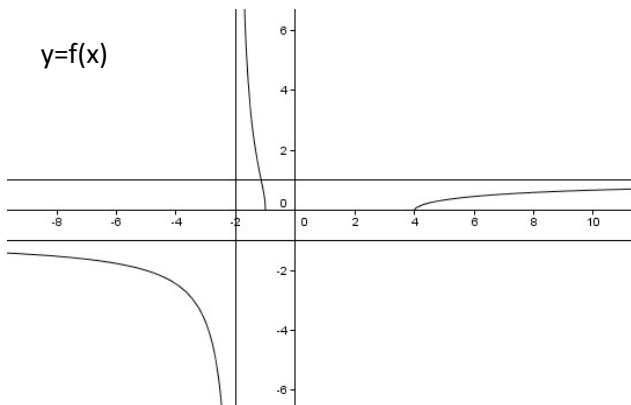
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}}{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1$$

$y = 1$ as. orizzontale per $x \rightarrow +\infty$
 $y = -1$ as. orizzontale per $x \rightarrow -\infty$

Intersezioni con gli asintoti orizzontali

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 2} \\ y = -1 \end{cases} \quad \sqrt{x^2 - 3x - 4} = -x - 2 \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \vee x > 4 \\ x \leq -2 \\ x = -\frac{8}{7} \end{cases} \quad \text{impossibile}$$

$$\begin{cases} y = \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x + 2} \\ y = 1 \end{cases} \quad \sqrt{x^2 - 3x - 4} = x + 2 \quad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \vee x > 4 \\ x \geq -2 \\ x = -\frac{8}{7} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{accettabile} \\ D(-\frac{8}{7}; 1) \end{matrix}$$



Calcola il seguente limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 2x}{2x + \sin x}$ giustificando i passaggi ed indicando il limite notevole usato.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \sin 2x}{2x + \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left(3 + \frac{\sin 2x}{2x} \right)}{x \left(2 + \frac{\sin x}{x} \right)} = \frac{3 + 2}{3} = \frac{5}{3} \quad \text{limite notevole} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Calcola il seguente limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{2x}$ giustificando i passaggi ed indicando il limite notevole usato.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{2x} = [1^\infty]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1-1-3}{x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{-4}{x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-4}{x+1} \right)^{2x}$$

Cambio di variabile $\frac{1}{t} = \frac{-4}{x+1} \quad t = -\frac{x+1}{4} \quad x = -4t - 1 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow -\infty$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{2(-4t-1)} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-8t} \cdot \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-2} = e^{-8} \cdot 1^{-2} = \frac{1}{e^8} \quad \text{limite notevole} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

In alternativa, si può svolgere così:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-3}{x+1} \right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{2x}}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x} \right)^{2x}}{\left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x}} = \frac{e^{-6}}{e^2} = e^{-8}$$

Infatti, calcolando separatamente il limite del numeratore e quello del denominatore, si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{3}{x} \right)^{2x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{t} \right)^{-6t} = e^{-6} \quad \text{avendo posto} \quad \frac{1}{t} = -\frac{3}{x} \quad t = -\frac{x}{3} \quad x = -3t \quad \text{per } x \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow -\infty$$

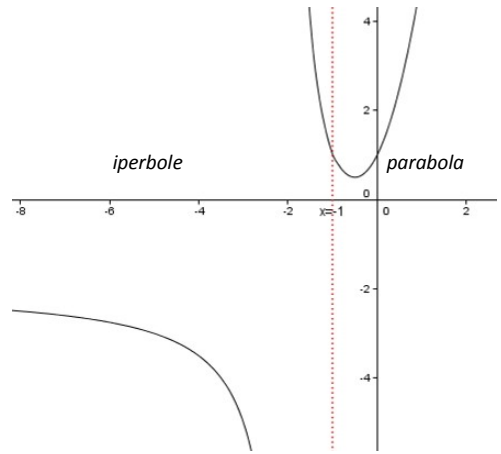
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{2x} = e^2$$

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & \text{per } x \geq -1 \\ \frac{ax-1}{x+2} & \text{per } x < -1 \end{cases}$

trova il valore di a per il quale $f(x)$ è continua in $x = -1$. Disegna il grafico esatto della funzione ottenuta.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} (2x^2 - ax + 1) = f(-1) = 3 + a \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{ax - 1}{x + 2} = -a - 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow 3 + a = -a - 1 \quad a = -2$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 2x + 1 & \text{per } x \leq -1 \\ \frac{-2x - 1}{x + 2} & \text{per } x > -1 \end{cases}$$

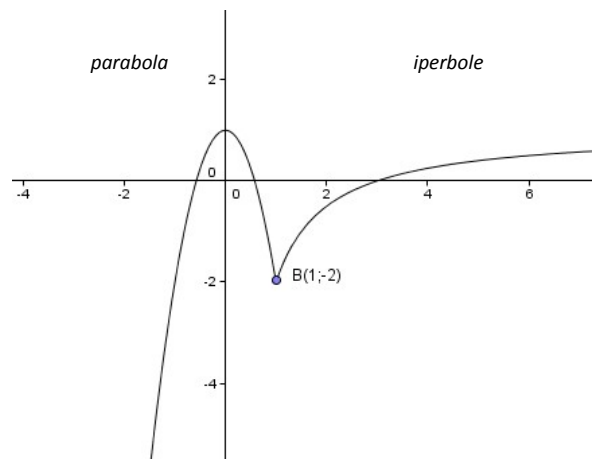


Data la funzione $f(x) = \begin{cases} a - 3x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ \frac{x - 3}{x} & \text{per } x > 1 \end{cases}$

determina il parametro imponendo che $f(x)$ sia continua in $x = 1$ Disegna il grafico esatto della funzione ottenuta.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} (a - 3x^2) = f(1) = a - 3 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 3}{x} = -2 \end{aligned} \right\} \rightarrow a - 3 = -2 \quad a = 1$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 3x^2 & \text{per } x \leq 1 \\ \frac{x - 3}{x} & \text{per } x > 1 \end{cases}$$



Calcola gli asintoti della seguente funzione $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4x}$

C.E. $2x^2 - 4x \neq 0 \quad x \neq 0; 2 \quad D = (-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x^2 - 2)}{2x(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - 2)}{2(x - 2)} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$

$x = 0$ discontinuità di III specie perché esiste il limite ma non esiste il valore della funzione nel punto 0. Non c'è asintoto.

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4x} = \frac{8 - 4}{0^\pm} = \pm \infty \quad x = 2 \text{ asintoto verticale.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(2 - \frac{4}{x} \right)} = \infty$$

non ci sono asintoti orizzontali, ci può essere l'asintoto obliquo

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x}{x(2x^2 - 4x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2}\right)}{x^3 \left(2 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 2x}{2x^2 - 4x} - \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^3 - 2x - x^3 + 2x^2}{2x(x-4)} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{2}{x}\right)}{x^2 \left(2 - \frac{4}{x}\right)} = 1$$

Asintoto obliquo $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Calcola gli asintoti della seguente funzione $f(x) = \frac{1-x^4}{8x^3-1}$ C.E. $8x^3 - 1 \neq 0$ $x \neq \frac{1}{2}$ $D = \left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^\pm} \frac{1-x^4}{8x^3-1} = \frac{1-\frac{1}{16}}{0^\pm} = \pm\infty \quad x = \frac{1}{2} \text{ asintoto verticale.}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^4}{8x^3-1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left(-1 + \frac{1}{x^4}\right)}{x^3 \left(8 - \frac{1}{x^3}\right)} = \infty \quad \text{non ci sono asintoti orizzontali, ci può essere l'asintoto obliquo}$$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1-x^4}{x(8x^3-1)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^4 \left(-1 + \frac{1}{x^4}\right)}{x^4 \left(8 - \frac{1}{x^4}\right)} = -\frac{1}{8}$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1-x^4}{8x^3-1} + \frac{1}{8}x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8-8x^4+8x^4-1}{8(8x^3-1)} = \frac{7}{\pm\infty} = 0 \quad \text{Asintoto obliquo } y = -\frac{1}{8}x.$$

Classifica le discontinuità delle seguenti funzioni seguenti

$$g(x) = \frac{x+2}{x^2-4} \quad \text{C.E. } x^2 - 4 \neq 0 \quad x \neq \pm 2$$

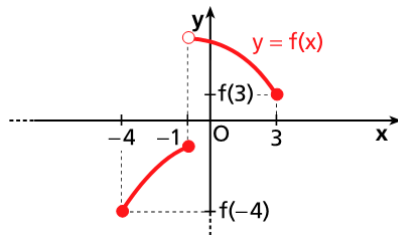
$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{x+2}{x^2-4} = \left[\frac{0}{0} \right] \quad \text{scompongo in fattori:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{x+2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^\pm} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{4} \quad x = -2 \text{ discontinuità di III specie perchè esiste il limite ma non esiste il valore della funzione}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{x+2}{x^2-4} = \frac{4}{0^\pm} = \pm\infty \quad x = 2 \text{ discontinuità di II specie perchè i limiti sono } \infty$$

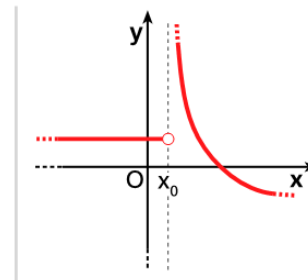
$$g(x) = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} \frac{x-1}{x-1} = 1 & \text{per } x \geq 1 \\ \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1 \quad x = 1 \text{ discontinuità di I specie con salto} = 2$$



$$x = -1$$

I specie, perché i limiti destro e sinistro sono finiti ma diversi tra loro



$$x = x_0$$

II specie, perché il limite destro è infinito

Enuncia il teorema di esistenza degli zeri. Verifica se valgono le ipotesi del teorema per la funzione seguente nell'intervallo indicato $y = \sqrt{4-x} - \ln x$ in $[1;3]$

Enunciato:

Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato che assuma valori di segno opposto negli estremi ammette almeno uno zero nell'intervallo considerato.

C.E. $0 < x \leq 4$ quindi la funzione è continua nell'intervallo $[1;3]$, perché $[1;3] \subset C.E.$

L'intervallo $[1;3]$ è chiuso e limitato.

Calcolo i valori negli estremi:

$$f(1) = \sqrt{4-1} - \ln 1 = \sqrt{3} > 0$$

$$f(3) = \sqrt{4-3} - \ln 3 = 1 - \ln 3 \approx -0,09 < 0$$

Il teorema vale, quindi la funzione si annulla almeno una volta nell'intervallo considerato.