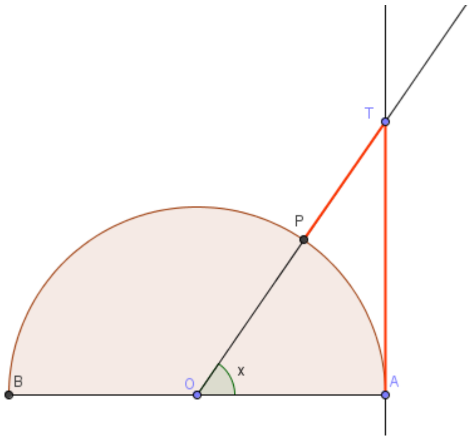
Problema 1

Sia P un punto di un arco AB di una semicirconferenza di centro O e raggio r. Sia T il punto in cui la semiretta OP incontra la tangente in A all'arco. Porre $x = A\hat{O}T$ **e calcolare i seguenti limiti:** $\lim_{P\to A} \frac{\overline{PT}}{\overline{AT}}$ **e** $\lim_{P\to A} \frac{\overline{AP}}{\overline{AT}}$



$x = A\hat{O}T$

Limitazioni geometriche

$$\left.\begin{array}{l} per \quad P \to A \quad x \to 0 \\ per \quad P \to B \quad x \to 180^\circ \end{array}\right) \Rightarrow \quad 0^\circ \le x \le 180^\circ \quad \text{con } x \ne 90^\circ$$

Considero il triangolo OAT retto in A con OA=r

$$\overline{AT} = \overline{OA}\ \mathrm{tg}x = r\ \mathrm{tg}x \qquad \overline{OT} = \frac{\overline{OA}}{\cos x} = \frac{r}{\cos x}$$

$$\overline{PT} = \overline{OT} - \overline{OP} = \frac{r}{\cos x} - r = r\frac{1-\cos x}{\cos x}$$

$$f(x) = \frac{r(1-\cos x)}{\cos x \cdot r \cdot \mathrm{tg}x} = \frac{1-\cos x}{\mathrm{sen}x}$$

$$\lim_{P\to A}\frac{\overline{PT}}{\overline{AT}} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\mathrm{sen}x} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}\,\frac{x}{\mathrm{sen}x} = 0$$

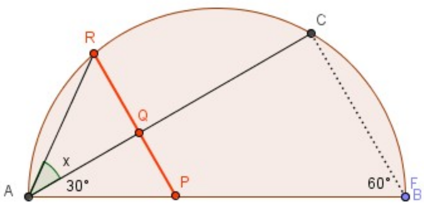
Considero la corda AP che sottende l'angolo alla circonferenza che è la metà dell'angolo al centro, quindi vale $\frac{x}{2}$.

Per il teorema della corda $\overline{AP} = 2r\ \mathrm{sen}\frac{x}{2}$

$$g(x) = \frac{2r\ \mathrm{sen}\frac{x}{2}}{r \cdot \mathrm{tg}x} = \frac{2\ \mathrm{sen}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}x} \qquad \lim_{P\to A}\frac{\overline{AP}}{\overline{AT}} = \lim_{x\to 0}\frac{2\mathrm{sen}\frac{x}{2}}{\mathrm{tg}x} = \lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\,\frac{x}{\mathrm{sen}x}\cos x = 1$$

Problema 2

Data la semicirconferenza di centro O e diametro $\overline{AB} = 2r$**, sia AC una sua corda di lunghezza** $\overline{AC} = r\sqrt{3}$**. Considera un punto P su AB e traccia da P la semiretta s perpendicolare ad AC. Detti Q ed R i punti in cui s interseca, rispettivamente, AC e la semicirconferenza e posto** $x = Q\hat{A}R$ **calcola il seguente limite:** $\lim_{P\to A}\frac{PQ}{QR}$

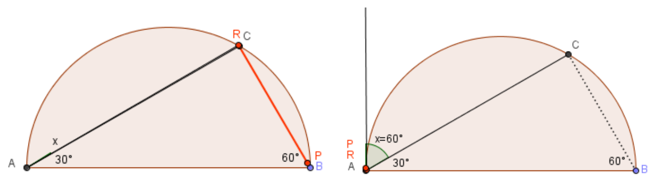


$\overline{AC} = r\sqrt{3} \quad \Rightarrow$ l'angolo alla circonferenza corrispondente alla corda vale 60°

Il triangolo ABC è retto in C perché inscritto in una semicirconferenza

$x = Q\hat{A}R$

limitazioni geometriche $\quad 0 \le x \le 60^\circ$



Considero il triangolo AQP retto in Q

$$\overline{QP} = \overline{AP}\ \mathrm{sen}30^\circ = \frac{\overline{AP}}{2}$$

$$\overline{AQ} = \overline{AP}\ \cos30^\circ = \overline{AP}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Considero il triangolo AQR retto in Q $\quad \overline{QR} = \overline{AQ}\ \mathrm{tg}x = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AP}\ \mathrm{tg}x$

$$f(x) = \frac{\overline{AP}}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AP}\ \mathrm{tg}x} = \frac{1}{\sqrt{3}\ \mathrm{tg}x} \qquad \lim_{P\to A}\frac{\overline{PQ}}{\overline{QR}} = \lim_{x\to 60^\circ}\frac{1}{\sqrt{3}\cdot \mathrm{tg}x} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

Disegna il grafico probabile della funzione $y = \ln\dfrac{7x+9}{x-3}$ **e, successivamente, ricava il grafico di** $y = |f(x)|$.

C.E.

$$\begin{cases} \dfrac{7x+9}{x-3} > 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \qquad x < -\frac{9}{7} \vee x > 3 \qquad D = \left(-\infty; -\frac{9}{7}\right) \cup (3; +\infty)$$

Zeri

$$\begin{cases} y = \ln\dfrac{7x+9}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \ln\dfrac{7x+9}{x-3} = 0 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{7x+9}{x-3} = e^0 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{7x+9}{x-3} = 1 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} 7x+9 = x-3 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ -- \end{cases} \quad A(-2;0)$$

Non ci sono intersezioni con l'asse y perché $x = 0 \notin C.E.$

Segno $y > 0$

$$\ln\frac{7x+9}{x-3} > 0 \quad \frac{7x+9}{x-3} > e^0 \quad \frac{7x+9}{x-3} > 1 \quad \frac{7x+9}{x-3} - 1 > 0 \quad \frac{7x+9-x+3}{x-3} > 0 \quad \frac{6x+12}{x-3} > 0$$

I.P. $x < -2 \vee x > 3$

Limiti e asintoti

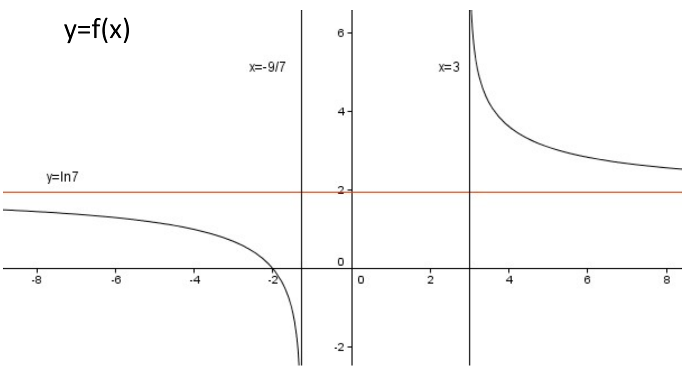
$$\lim_{x\to\pm\infty} \ln\frac{7x+9}{x-3} = \ln\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x+9}{x-3} = \ln\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(7+\frac{9}{x}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)} = \ln 7 \simeq 1{,}9 \qquad y = \ln 7 \text{ asintoto orizzontale}$$

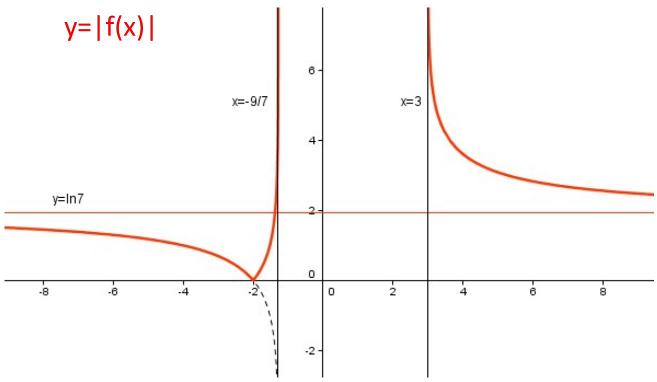
Intersezioni con l'asintoto orizzontale

$$\begin{cases} y = \ln\dfrac{7x+9}{x-3} \\ y = \ln 7 \end{cases} \quad \ln\frac{7x+9}{x-3} = \ln 7 \quad \frac{7x+9}{x-3} = 7 \quad 7x+9 = 7(x-3) \quad \textit{impossibile}$$

$$\lim_{x\to-\frac{9}{7}^-} \ln\frac{7x+9}{x-3} = \ln\lim_{x\to-\frac{9}{7}^-}\frac{7x+9}{x-3} = \ln\frac{0^-}{-\frac{9}{7}-3} = \ln 0^+ = -\infty \qquad x = -\frac{9}{7} \text{ asintoto verticale sinistro}$$

$$\lim_{x\to3^+} \ln\frac{7x+9}{x-3} = \ln\lim_{x\to3^+}\frac{7x+9}{x-3} = \ln\frac{21+9}{0^+} = \ln(+\infty) = +\infty \qquad x = 3 \text{ asintoto verticale destro}$$





Disegna il grafico probabile della funzione $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+2}$ **e, successivamente, ricava il grafico di** $y = \left| f(x) \right|$**.**

<u>C.E.</u>

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x + 2 \neq 0 \end{cases} \qquad x \leq -1 \vee x \geq 4 \wedge x \neq -2 \qquad D = (-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup [4; +\infty)$$

<u>Zeri</u>

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+2} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 = 0 \\ -- \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \qquad A(-1;0) \quad B(4;0)$$

Non ci sono intersezioni con l'asse y perché $x = 0 \notin C.E.$

<u>Segno</u> $y > 0 \quad x > -2$

<u>Limiti e asintoti</u>

$$\lim_{x \to -2^{\pm}} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+2} = \frac{\sqrt{6}}{0^{\pm}} = \pm\infty \qquad x = -2 \quad \text{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(1 - \frac{3}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}}{x\left(1 + \frac{2}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{|x|}{x} = \pm 1$$

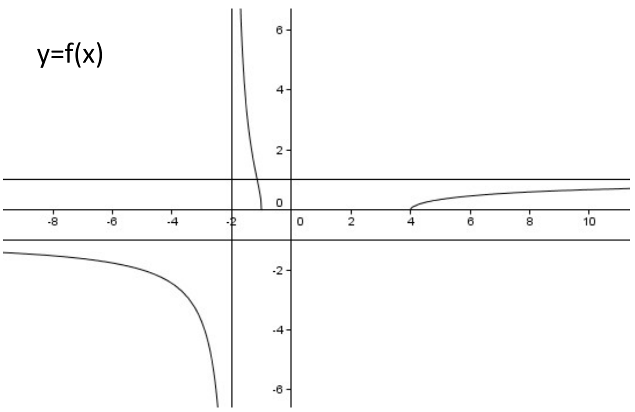
$y = 1$ as. orizzontale per $x \to +\infty$

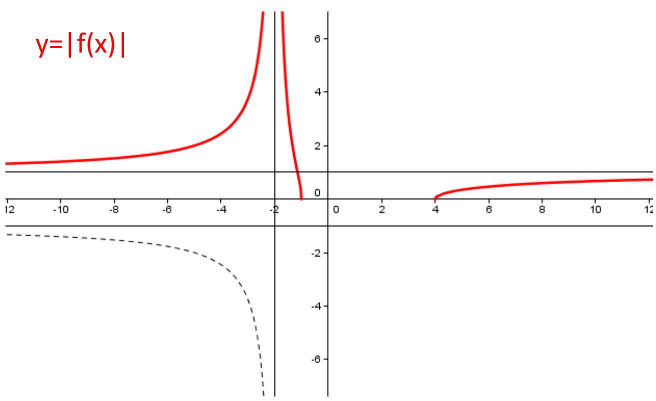
$y = -1$ as. orizzontale per $x \to -\infty$

<u>Intersezioni con gli asintoti orizzontali</u>

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+2} \\ y = -1 \end{cases} \qquad \sqrt{x^2 - 3x - 4} = -x - 2 \qquad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -1 \vee x > 4 \\ x \leq -2 \\ x = -\dfrac{8}{7} \end{cases} \qquad \textit{impossibile}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x+2} \\ y = 1 \end{cases} \qquad \sqrt{x^2 - 3x - 4} = x + 2 \qquad \begin{cases} x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ -x - 2 \geq 0 \\ x^2 - 3x - 4 = x^2 + 4x + 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -1 \vee x > 4 \\ x \geq -2 \\ x = -\dfrac{8}{7} \end{cases} \qquad \textit{accettabile} \quad D\left(-\frac{8}{7}; 1\right)$$





Calcola il seguente limite $\lim_{x\to 0}\frac{3x+\operatorname{sen}2x}{2x+\operatorname{sen}x}$ **giustificando i passaggi ed indicando il limite notevole usato.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x+\operatorname{sen}2x}{2x+\operatorname{sen}x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\left(3+\frac{\operatorname{sen}2x}{2x}2\right)}{x\left(2+\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)}=\frac{3+2}{3}=\frac{5}{3} \qquad \text{limite notevole } \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$$

Calcola il seguente limite $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x}$ **giustificando i passaggi ed indicando il limite notevole usato.**

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x}=\left[1^{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1-1-3}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x+1}+\frac{-4}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{-4}{x+1}\right)^{2x}$$

Cambio di variabile $\frac{1}{t}=\frac{-4}{x+1}$ $\quad t=-\frac{x+1}{4}$ $\quad x=-4t-1$ $\quad$ per $x\to +\infty$ $\quad t\to -\infty$

$$\lim_{t\to -\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2(-4t-1)}=\lim_{t\to -\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-8t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-2}=e^{-8}\cdot 1^{-2}=\frac{1}{e^{8}} \qquad \text{limite notevole } \lim_{x\to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

In alternativa, si può svolgere così:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x-3}{x+1}\right)^{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}{}^{2x}}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}}=\frac{e^{-6}}{e^{2}}=e^{-8}$$

Infatti, calcolando separatamente il limite del numeratore e quello del denominatore, si ha:

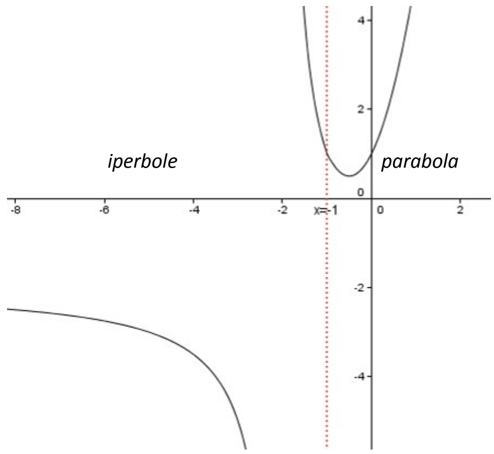
$$\lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}=\lim_{t\to -\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{-6t}=e^{-6}$$ avendo posto $\frac{1}{t}=-\frac{3}{x}$ $\quad t=-\frac{x}{3}$ $\quad x=-3t$ $\quad$ *per* $x\to +\infty$ $\quad t\to -\infty$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}=e^{2}$$

Data la funzione $f(x)=\begin{cases}2x^{2}-ax+1 & \text{per } x\geq -1\\ \frac{ax-1}{x+2} & \text{per } x<-1\end{cases}$

trova il valore di *a* per il quale $f(x)$ **è continua in** $x=-1$**. Disegna il grafico esatto della funzione ottenuta.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -1^-}\left(2x^2-ax+1\right)=f(-1)=3+a\\ \lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{ax-1}{x+2}=-a-1\end{array}\right)\to 3+a=-a-1\qquad a=-2$$

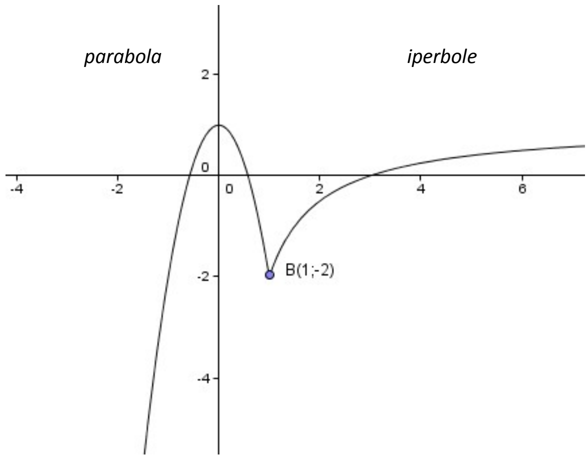


$$f(x)=\begin{cases}2x^2+2x+1 & \text{per } x\le -1\\ \dfrac{-2x-1}{x+2} & \text{per } x>-1\end{cases}$$

Data la funzione $f(x)=\begin{cases}a-3x^2 & per \quad x\le 1\\ \dfrac{x-3}{x} & per \quad x>1\end{cases}$

determina il parametro imponendo che $f(x)$ **sia continua in** $x=1$ **Disegna il grafico esatto della funzione ottenuta.**

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-}\left(a-3x^2\right)=f(1)=a-3\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-3}{x}=-2\end{array}\right)\to a-3=-2\qquad a=1$$



$$f(x)=\begin{cases}1-3x^2 & per \quad x\le 1\\ \dfrac{x-3}{x} & per \quad x>1\end{cases}$$

Calcola gli asintoti della seguente funzione $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{2x^2-4x}$

C.E. $2x^2-4x\ne 0 \qquad x\ne 0;2 \qquad D=\left(-\infty;0\right)\cup\left(0;2\right)\cup\left(2;+\infty\right)$

$$\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x^3-2x}{2x^2-4x}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{x(x^2-2)}{2x(x-2)}=\lim_{x\to 0^\pm}\frac{(x^2-2)}{2(x-2)}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

$x=0$ discontinuità di III specie perché esiste il limite ma non esiste il valore della funzione nel punto 0. Non c'è asintoto.

$$\lim_{x\to 2^\pm}\frac{x^3-2x}{2x^2-4x}=\frac{8-4}{0^\pm}=\pm\infty$$ $x=2$ asintoto verticale.

$$\lim_{x\to \pm\infty}\frac{x^3-2x}{2x^2-4x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(2-\dfrac{4}{x}\right)}=\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali, ci può essere l'asintoto obliquo

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{x\left(2x^2-4x\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(2-\frac{4}{x^2}\right)}=\frac{1}{2}$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x}{2x^2-4x}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x}{2x^2-4x}-\frac{1}{2}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3-2x-x^3+2x^2}{2x(x-4)}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x^2\left(2-\frac{4}{x}\right)}=1$$

Asintoto obliquo $y=\frac{1}{2}x+1$.

Calcola gli asintoti della seguente funzione $f(x)=\frac{1-x^4}{8x^3-1}$ **C.E.** $8x^3-1\neq 0$ $x\neq\frac{1}{2}$ $D=\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^{\pm}}\frac{1-x^4}{8x^3-1}=\frac{1-\frac{1}{16}}{0^{\pm}}=\pm\infty$$

$x=\frac{1}{2}$ asintoto verticale.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^4}{8x^3-1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(-1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^3\left(8-\frac{1}{x^3}\right)}=\infty$$

non ci sono asintoti orizzontali, ci può essere l'asintoto obliquo

$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-x^4}{x\left(8x^3-1\right)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^4\left(-1+\frac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(8-\frac{1}{x^4}\right)}=-\frac{1}{8}$$

$$q=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1-x^4}{8x^3-1}+\frac{1}{8}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{8-8x^4+8x^4-1}{8\left(8x^3-1\right)}=\frac{7}{\pm\infty}=0$$

Asintoto obliquo $y=-\frac{1}{8}x$.

Classifica le discontinuità delle seguenti funzioni seguenti

$g(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$ C.E. $x^2-4\neq 0$ $x\neq\pm 2$

$$\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{x+2}{x^2-4}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

scompongo in fattori:

$$\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{x+2}{\left(x+2\right)\left(x-2\right)}=\lim_{x\to-2^{\pm}}\frac{1}{\left(x-2\right)}=-\frac{1}{4}$$

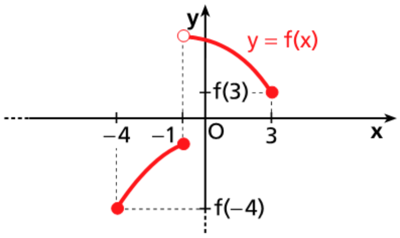
$x=-2$ discontinuità di III specie perchè esiste il limite ma non esiste il valore della funzione

$$\lim_{x\to 2^{\pm}}\frac{x+2}{x^2-4}=\frac{4}{0^{\pm}}=\pm\infty$$

$x=2$ discontinuità di II specie perchè i limiti sono ∞

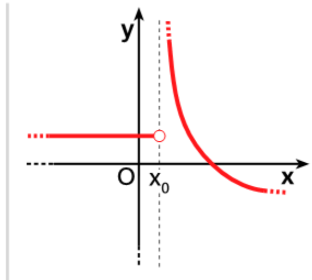
$$g(x) = \frac{|x-1|}{x-1} = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x-1} = 1 & \text{per } x \geq 1 \\ \dfrac{-(x-1)}{x-1} = -1 & \text{per } x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = -1 \qquad \lim_{x \to 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} = 1 \qquad x = 1 \text{ discontinuità di I specie con salto} = 2$$



$x = -1$

I specie, perché i limiti destro e sinistro sono finiti ma diversi tra loro



$x = x_0$

II specie, perché il limite destro è infinito

Enuncia il teorema di esistenza degli zeri. Verifica se valgono le ipotesi del teorema per la funzione seguente nell'intervallo indicato $y = \sqrt{4-x} - \ln x \quad \text{in } [1;3]$

Enunciato:

Una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato che assuma valori di segno opposto negli estremi ammette almeno uno zero nell'intervallo considerato.

C.E. $0 < x \leq 4$ qundi la funzione è continua nell'intervallo [1;3], perché $[1;3] \subset C.E.$

L'intervallo $[1;3]$ è chiuso e limitato.

Calcolo i valori negli estremi:

$$f(1) = \sqrt{4-1} - \ln 1 = \sqrt{3} > 0$$
$$f(3) = \sqrt{4-3} - \ln 3 = 1 - \ln 3 \simeq -0,09 < 0$$

Il teorema vale, quindi la funzione si annulla almeno una volta nell'intervallo considerato.