La legge di Gravitazione universale

Conferme sperimentali e esercizi

La legge della gravitazione universale

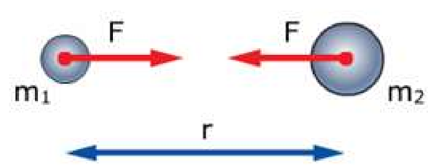
Se i pianeti non si muovono in linea retta ma su orbite allora, per il Principio di Inerzia, su di essi deve agire una forza, la forza di gravità

La forza che tiene i pianeti in orbita e che tiene la Luna intorno alla Terra è la stessa che fa cadere la mela, cioè che fa cadere gli oggetti al suolo

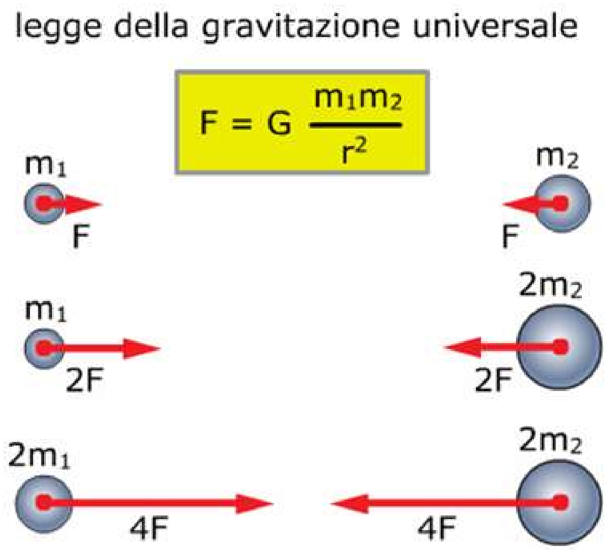
Newton intuì l'esistenza di una forza universale che fa in modo che tutti i corpi dotati di massa si attraggano fra di loro

G, costante di gravitazione universale, ha lo stesso valore ovunque i corpi si trovino nell'Universo, per due molecole sulla Terra o per due stelle in una lontana galassia, che si attraggano reciprocamente

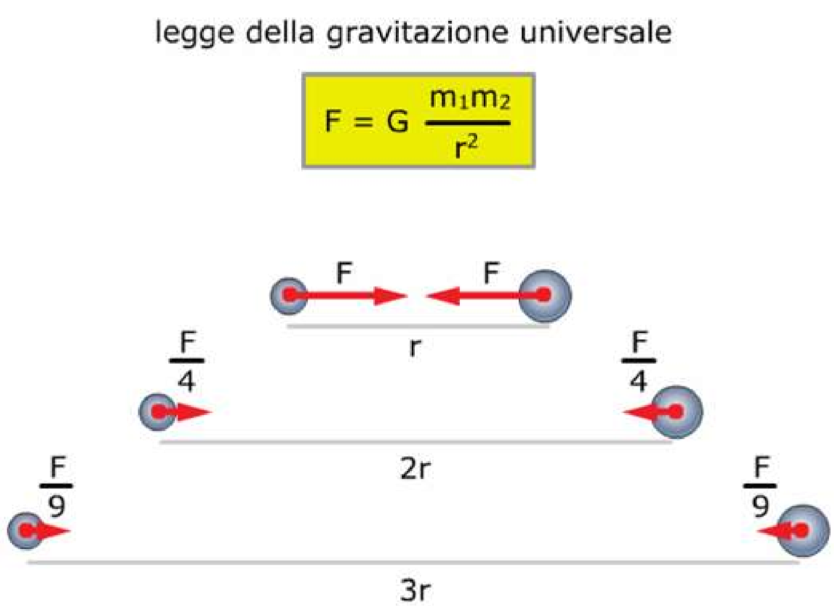
$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$$



La forza di gravità
è tanto maggiore quanto maggiori sono le masse dei corpi



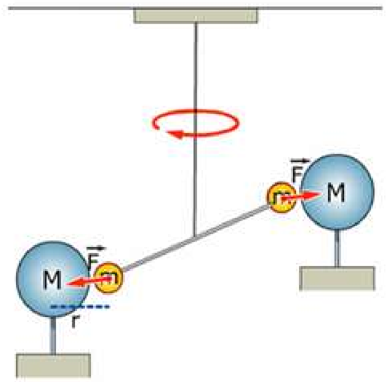
La forza di gravità
diminuisce rapidamente se la distanza fra i corpi aumenta



La costante G
il valore previsto da Newton venne misurato da Cavendish nel 1798 con la bilancia di torsione

Dalla legge di gravitazione universale si può ricavare il valore della costante G a patto di misurare:
La forza di attrazione F
le masse m ed M dei corpi che si attraggono
La distanza reciproca r fra i loro centri

Lo strumento usato è la bilancia di torsione di Cavendish



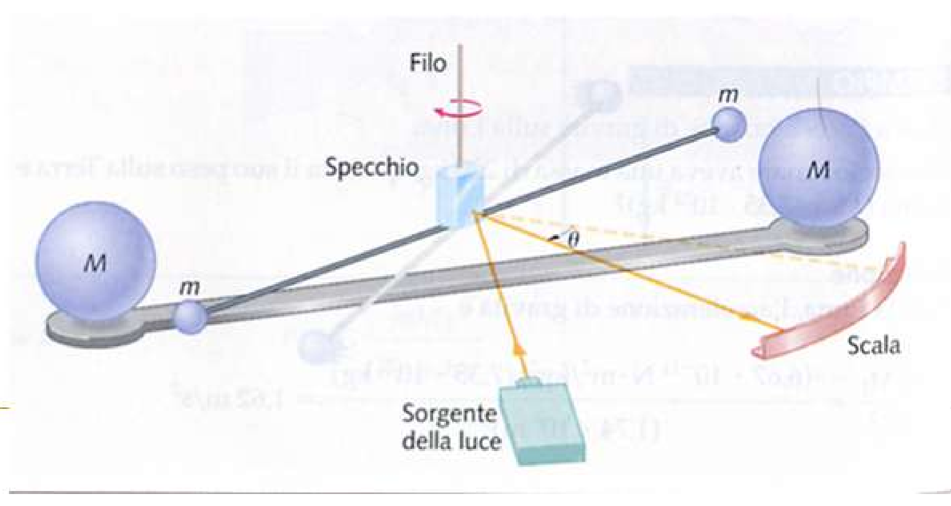
$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

$$G = \frac{Fr^2}{mM}$$

$$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Bilancia di Cavendish

Come funziona:
Le masse M vengono avvicinate e il bilanciere che sostiene le masse m ruota per l'attrazione gravitazionale tra M ed m
Lo specchietto sostenuto dal filo di quarzo ruota
Il raggio riflesso si sposta sulla scala graduata segnando il valore della forza



Cavendish pesa la Terra
Noto il valore di G si può misurare indirettamente il valore della massa della terra

Il peso sulla superficie terrestre di un oggetto di massa m è mg

$$F_{peso} = mg$$

Per la legge di Newton il peso dell'oggetto di massa m sulla Terra è anche

$$F_{peso} = G\frac{mM}{r^2}$$

Uguagliando le due espressioni e ricavando M si ottiene

$$\cancel{m}g = G\frac{\cancel{m}M}{R^2}$$

$$M = \frac{gR^2}{G}$$

$$M_{Terra} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,kg$$

la cometa di Halley (1759)
La prima volta che la legge di Newton è stata applicata al di fuori dei pianeti: la determinazione dell'orbita della cometa di Halley

Intorno al 1700 l'astronomo Edmond Halley si accorse che le caratteristiche della cometa del 1682 erano quasi le stesse della cometa apparsa nel 1531 e nel 1607 (osservata da Giovanni Keplero a Praga); Halley concluse che tutte e tre le comete erano lo stesso oggetto che ritornava ogni 76 anni.

Usando la legge di Newton calcolò le perturbazioni che la cometa doveva subire a causa dell'attrazione dei pianeti e predisse il suo ritorno.

Halley aveva ragione, la cometa fu vista nel dicembre del 1758, e passò al suo perielio a marzo 1759

Halley non visse abbastanza per vederne il ritorno. Morì nel 1742.

La scoperta del pianeta Nettuno (1846)

Una scoperta fatta applicando la legge di Newton

Fino all'anno 1781 si credeva che il Sistema Solare fosse composto dal Sole e da sei pianeti: Mercurio, Venere, Terra, Marte, Giove e Saturno, più le loro lune.

Nel 1781 un astronomo inglese, William Hershell, scoprì una debole stellina che sembrava spostarsi lentamente rispetto alle altre stelle fisse. Dopo accurate osservazioni si notò che era un nuovo pianeta al quale fu dato il nome di Urano.

Nel 1821 Alexis Bouvard pubblicò le tavole astronomiche dell'orbita di Urano, che tenevano conto degli effetti gravitazionali di tutti i pianeti noti. Le osservazioni successive mostrarono che le posizioni di Urano non erano esattamente quelle previste, cosicché si pensò che ci fosse un ulteriore pianeta.

Con la legge di Newton furono calcolati i dati orbitali di questo pianeta fantasma e nel 1846 gli astronomi osservarono Nettuno proprio là dove previsto dai calcoli.

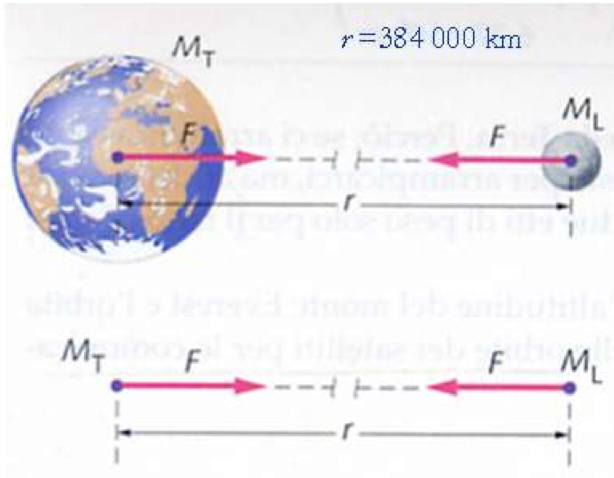
La gravità sugli asteroidi

Ida e la sua luna Dactyl

L'immagine ripresa dalla sonda Galileo il 28 Agosto 1993 nel suo viaggio verso Giove mostra un piccolo corpo roccioso di nome Ida che orbita intorno al Sole ad una distanza di circa 450 milioni di chilometri, nella fascia degli asteroidi.

Ida ha le dimensioni di una grande montagna: 53.6×24.0×15.2 km. Intorno ad essa la sonda Galileo ha fotografato una piccolissima luna! A questa è stato dato il nome di Dactyl ed ha solo 1,4 km di raggio. Essa orbita intorno al corpo maggiore ad una distanza di soli 90 km con un periodo di poco più di 36 ore.

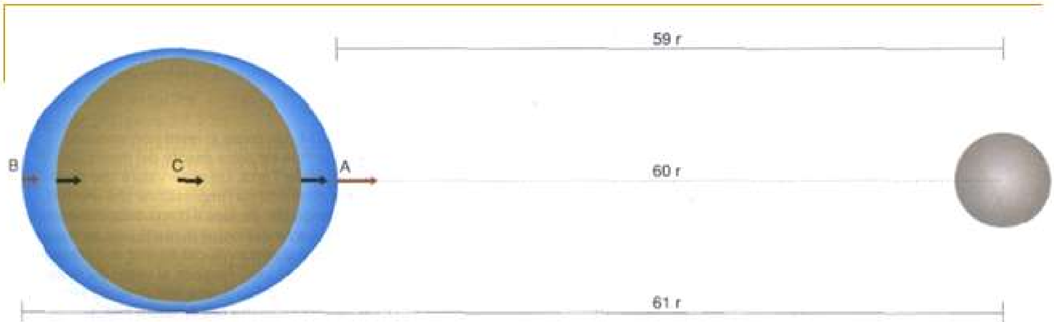
La forza agente sulla Luna è uguale alla forza che la Luna esercita sulla Terra



$M_T = 5{,}98 \cdot 10^{24}\, kg$	$M_L = 7{,}34 \cdot 10^{22}\, kg$	$r = 3{,}84 \cdot 10^{8}\, m$

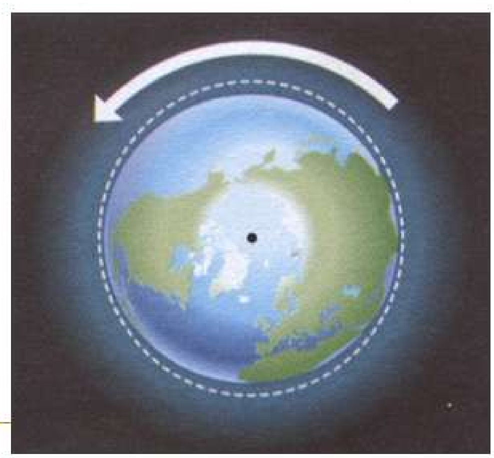
$$F = 1{,}98 \cdot 10^{20}\, N$$

cosa sono le maree?



Le maree

Rigonfiamenti oceanici
In questa illustrazione sono rappresentati, in dimensioni molto esagerate, i rigonfiamenti oceanici provocati dall'attrazione gravitazionale esercitata dalla Luna sulla Terra. Durante la rotazione della Terra attorno al proprio asse, i rigonfiamenti sembrano spostarsi lungo la superficie terrestre.



Altro aspetto rivoluzionario della gravità: è una forza che agisce a distanza

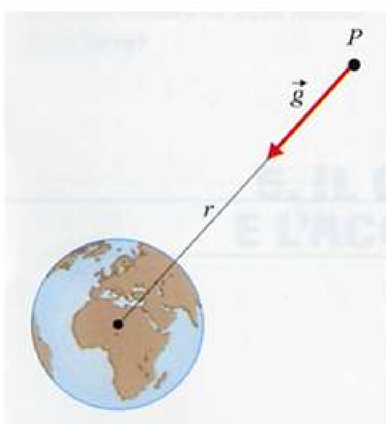
Fino ai tempi di Newton le forze studiate agivano per contatto: forza di trazione, spinta, etc.
la forza gravitazionale agisce a distanza tra i corpi dotati di massa
la forza gravitazionale agisce tra i corpi anche se fra essi c'è il vuoto
Newton dice nei Principia
Ma finora non sono riuscito a scoprire la causa di quelle proprietà della gravità ... non avanzo ipotesi (hypoteses non fingo) ... è sufficiente che la gravità esista realmente, agisca secondo le leggi che abbiamo spiegato e basti a spiegare tutti i moti dei corpi celesti.
Nel 1800 Faraday descrive le forze a distanza mediante campi vettoriali

DEFINIZIONE

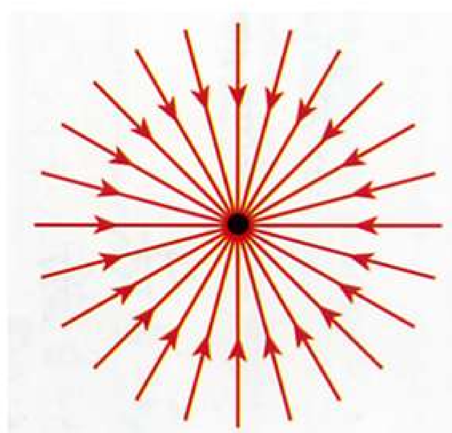
Il campo gravitazionale generato in un punto dello spazio da un sistema di masse è il vettore dato dal rapporto tra la forza gravitazionale agente sulla massa di prova m e la massa m stessa

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Il campo gravitazionale è l'accelerazione di gravità $\vec{g}$



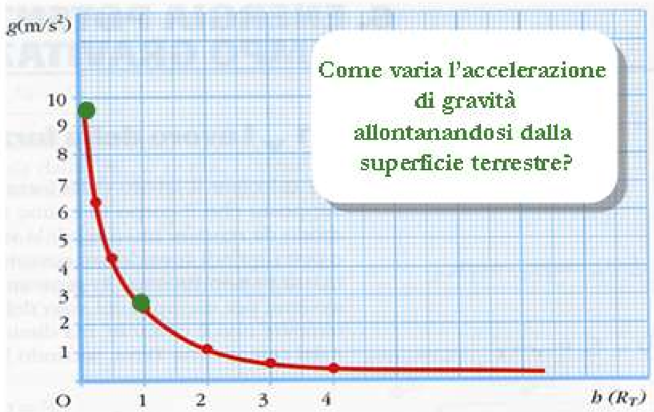
Una massa M genera nello spazio circostante un campo gravitazionale diretto radialmente verso M , la cui intensità si calcola così: $g = G\frac{M}{r^2}$



Il campo gravitazionale viene rappresentato mediante linee di forza che indicano la traiettoria che una massa di prova m descriverebbe se si trovasse in un punto qualsiasi dello spazio.

Il campo gravitazionale è l'accelerazione di gravità

$$g = G\frac{M}{r^2}$$



$$g = G\frac{M}{R^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}kg}{(6{,}38 \cdot 10^6 m)^2} = 9{,}81\frac{m}{s^2}$$

Accelerazione di gravità sulla superficie della Terra, a distanza R dal centro della Terra

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\frac{5{,}98 \cdot 10^{24}kg}{(6{,}38 \cdot 10^6 + 6{,}38 \cdot 10^6)^2 m^2} = 2{,}45\frac{m}{s^2}$$

Accelerazione di gravità a distanza R dalla superficie terrestre, cioe' a distanza 2R dal centro della Terra

Il peso di un oggetto

Applicando la legge di gravitazione universale di Newton, un corpo di massa m = 1 kg sulla superficie della Terra pesa 9,8 N.

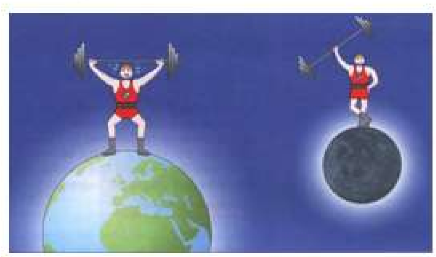
Se il corpo si trova a distanza h dalla superficie il suo peso è:

$$F_{peso} = G\frac{mM}{r^2} = G\frac{mM}{(R+h)^2}$$

Lo stesso corpo, sulla superficie della Luna, ha un peso di 1,6 N.

$$F_{peso} = G\frac{mM_L}{{R_L}^2} = 6{,}67 \cdot 10^{11}\frac{Nm^2}{kg^2}\frac{1kg \cdot 7{,}34 \cdot 10^{22}kg}{(1{,}76 \cdot 10^6)^2 m^2} = 1{,}6N$$

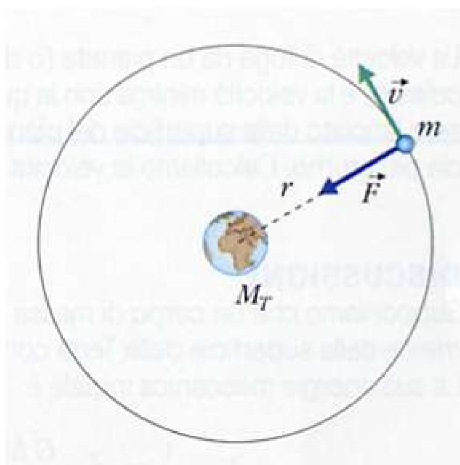
Il peso sulla Luna è 1/6 di quello sulla Terra perché l'accelerazione di gravità lunare è 1/6 di quella terrestre …. l'uomo con il bilanciere sulla Luna fa meno fatica ….



La forza gravitazionale è una forza centripeta

forza gravitazionale = forza centripeta

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$



Se l'orbita è ellittica bisogna considerare il semiasse maggiore a dell'ellisse al posto di r, raggio dell'orbita

Dalla legge di Newton si ricavano le tre leggi di Keplero … per esempio ricaviamo la terza legge

La forza gravitazionale è una forza centripeta $$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

Se T è il periodo di rivoluzione, la velocità v del pianeta è data da: $$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Sostituendo si ha: $$G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r}$$

Da cui si ricava: $$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$$

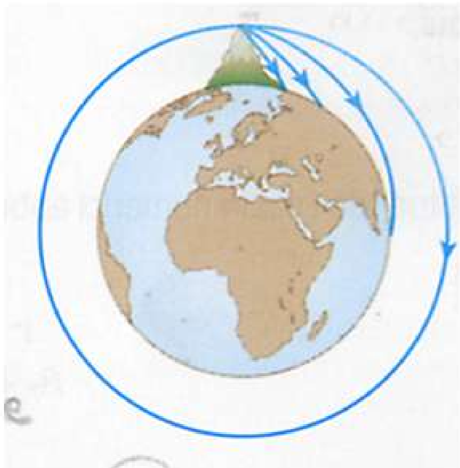
e infine $$\boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}}$$

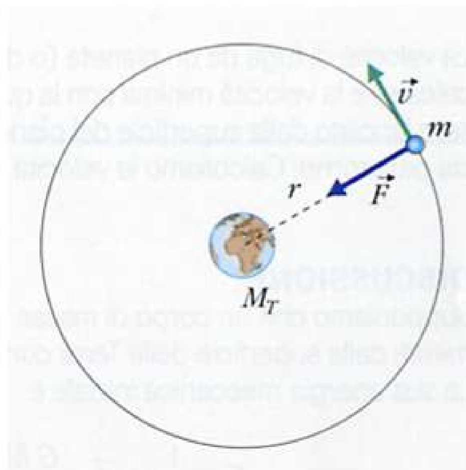
A secondo membro vi è la costante di Keplero: essa dipende solo dalla massa del corpo centrale.

Per tutti i pianeti che orbitano intorno al Sole vale $$\frac{4\pi^2}{GM_{Sole}} = 2{,}99 \cdot 10^{-19}\ \frac{s^2}{m^3}$$

Per tutti i satelliti terrestri vale $$\frac{4\pi^2}{GM_{Terra}} = 9{,}98 \cdot 10^{-14}\ \frac{s^2}{m^3}$$

Dal moto dei proiettili alle orbite dei satelliti

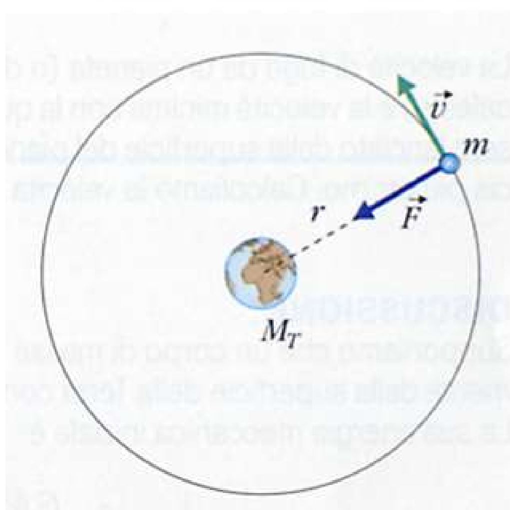




$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Lanciando un proiettile a velocità di 7,91km/s da una montagna, esso entra in orbita, vicinissimo alla superficie terrestre

La velocità dei satelliti in orbita

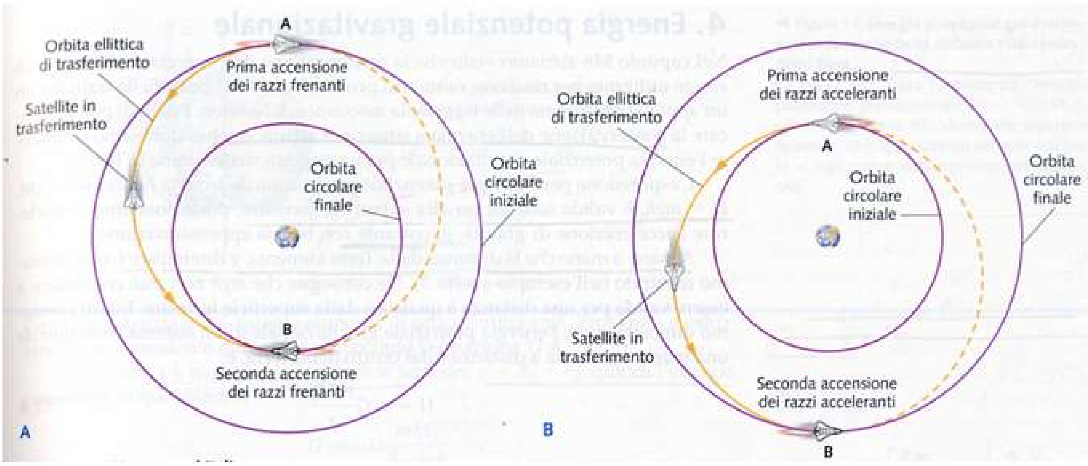


$$G\frac{M\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}\frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

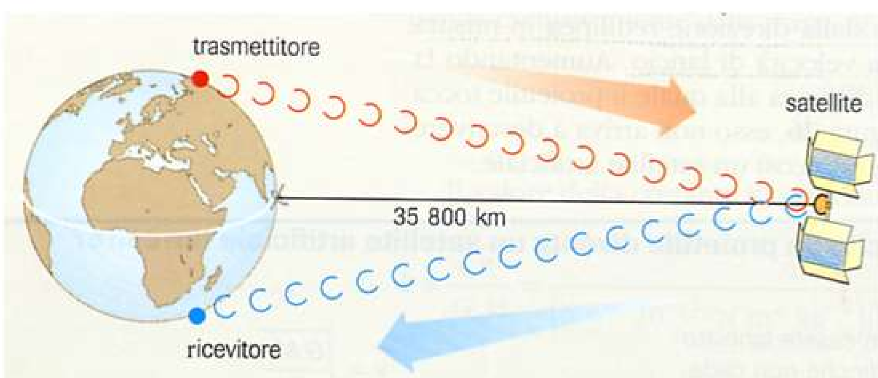
La velocità di un satellite in orbita non dipende dalla massa del satellite
All'aumentare del raggio r dell'orbita il satellite riduce la velocità orbitale, cioè impiega più tempo a compiere un giro completo

Manovre orbitali
come fa un veicolo spaziale a passare da un'orbita all'altra?
Semplice: applica le leggi di Keplero



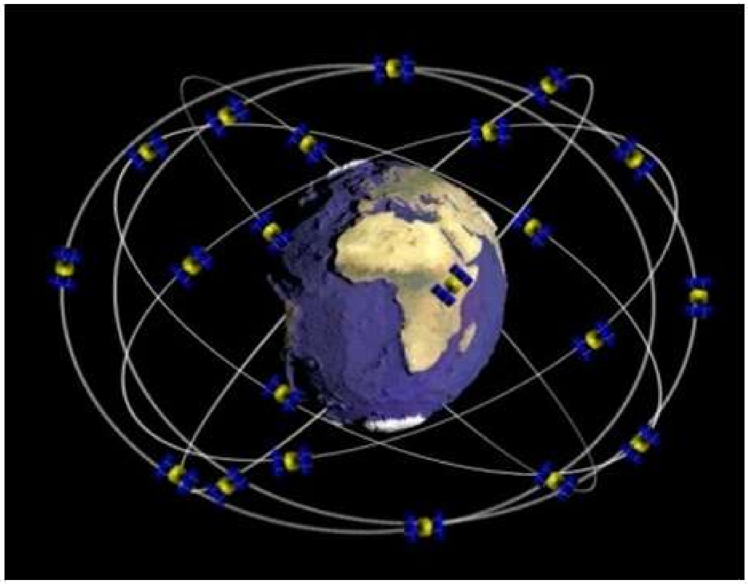
Hohmann transfer

I satelliti geostazionari
usati per telecomunicazioni e previsioni metereologiche



Un satellite geostazionario orbita sul piano equatoriale terrestre.
Esso compie un'orbita completa in 24 ore.
Visto dalla Terra sembra fermo.
La sua distanza dal centro della Terra è 42 180km.
La sua velocità orbitale è 3,1 km/s

I satelliti del GPS



I satelliti del GPS

In generale, le orbite in cui vengono collocati i satelliti sono di due tipi: la cosiddetta orbita bassa relativamente vicina alla Terra e quella geostazionaria situata a circa 42 200 chilometri dal centro terrestre.

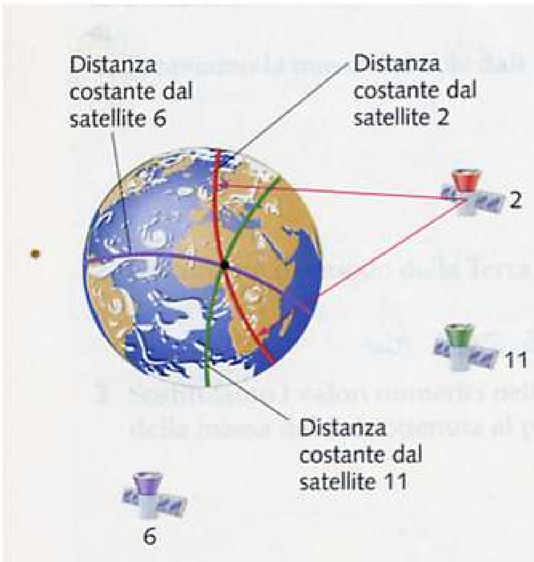
Vantaggi dell'orbita bassa: un costo per i singoli lanci relativamente basso e trasmettitori sui satelliti di modesta potenza

Svantaggi dell'orbita bassa: per garantire una copertura globale è necessario impiegare centinaia di satelliti.

Se i progettisti militari avessero invece deciso di collocare i satelliti GPS sull'orbita geostazionaria avrebbero avuto, come vantaggio, la necessità di collocare un numero di satelliti di gran lunga inferiore e, come svantaggio, che i trasmettitori sui satelliti avrebbero dovuto essere molto più potenti e le regioni polari non sarebbero state coperte dal segnale.

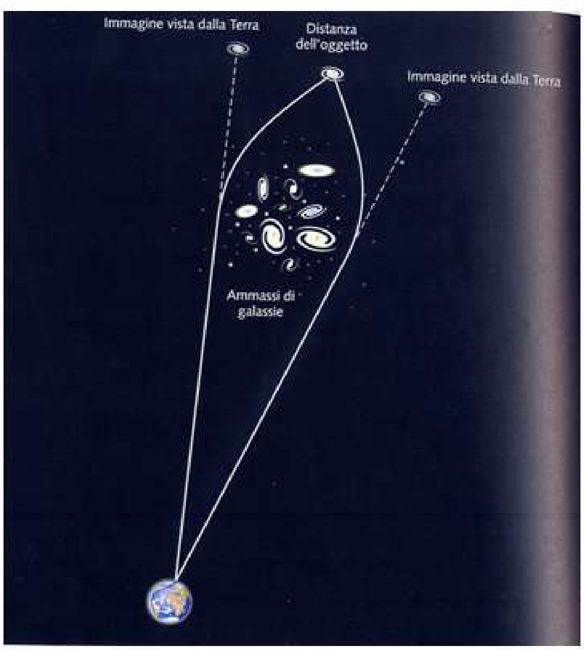
Quello che i progettisti militari in realtà fecero fu di optare per una soluzione di compromesso, ed infatti collocarono i satelliti su orbite intermedie, vale a dire ad un'altitudine di circa 20 000 chilometri. A questa quota bastano 17 satelliti per assicurare che almeno quattro di essi siano sempre ricevibili da qualunque parte del mondo.
La configurazione finale che alla fine è stata adottata per il GPS comprende 24 satelliti principali.

I satelliti per il GPS
Global Positioning System



Bastano tre satelliti per localizzare un punto sulla superficie terrestre?

Sembra perfetto ma … tutto è relativo



Come si spiega la doppia immagine di una stella lontana rilevata dai telescopi?

La teoria newtoniana ha bisogno di aggiustamenti … ecco la relatività generale di Einstein

Einstein
la gravità come curvatura dello spazio-tempo

La legge della gravitazione universale di Newton venne accettata per oltre 200 anni. Però, all'inizio di questo secolo, nel 1915 per l'esattezza, Einstein pubblicò la sua teoria della relatività generale, che ridefinì completamente il concetto di gravità. La teoria di Newton non è più del tutto corretta, benché per oggetti che viaggiano a basse velocità essa dia ancora risultati accurati e sia ancora largamente usata.

Per Einstein la gravità non è "azione a distanza", una forza fra due oggetti che si attirano fra loro, ma piuttosto essa è un risultato della curvatura dello spazio-tempo. Questa è un spiegazione della gravità molto diversa da quella di Newton.