

Geometria analitica

Retta

Circonferenza

Parabola

Ellisse

Iperbole



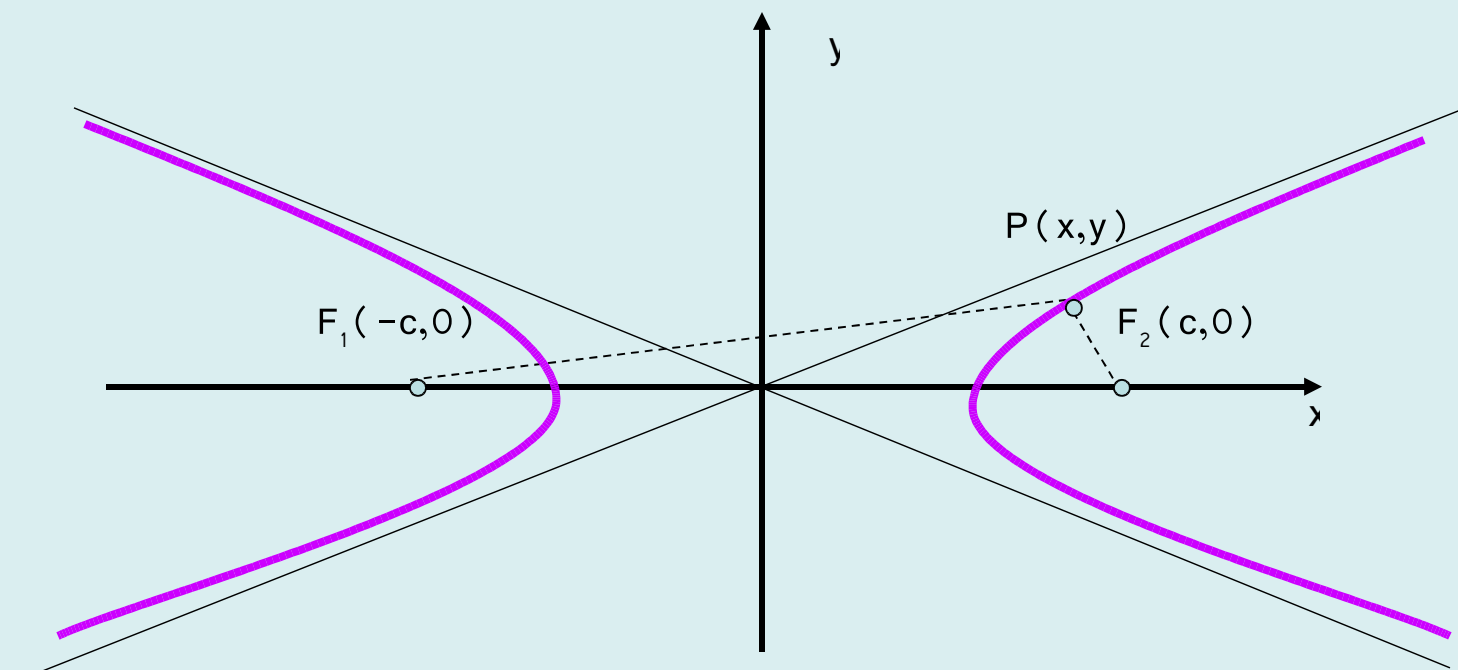
Iperbole come luogo geometrico

L'iperbole è una curva piana aperta, luogo geometrico dei punti per i quali il valore assoluto della differenza tra le distanze da due punti fissi del piano, detti fuochi, è costante

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

$$\overline{F_1F_2} = 2c$$

$$\overline{F_1F_2} > |\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$$



Disuguaglianza tra i lati del triangolo F_1PF_2

$$2c > 2a$$

Ricavo l'equazione canonica

$$|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$$

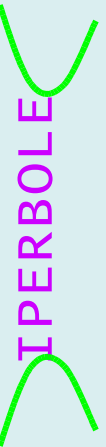
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a)^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = (c^2 - a^2)a^2$$

Pongo $b^2 = c^2 - a^2$ e divido per a^2b^2

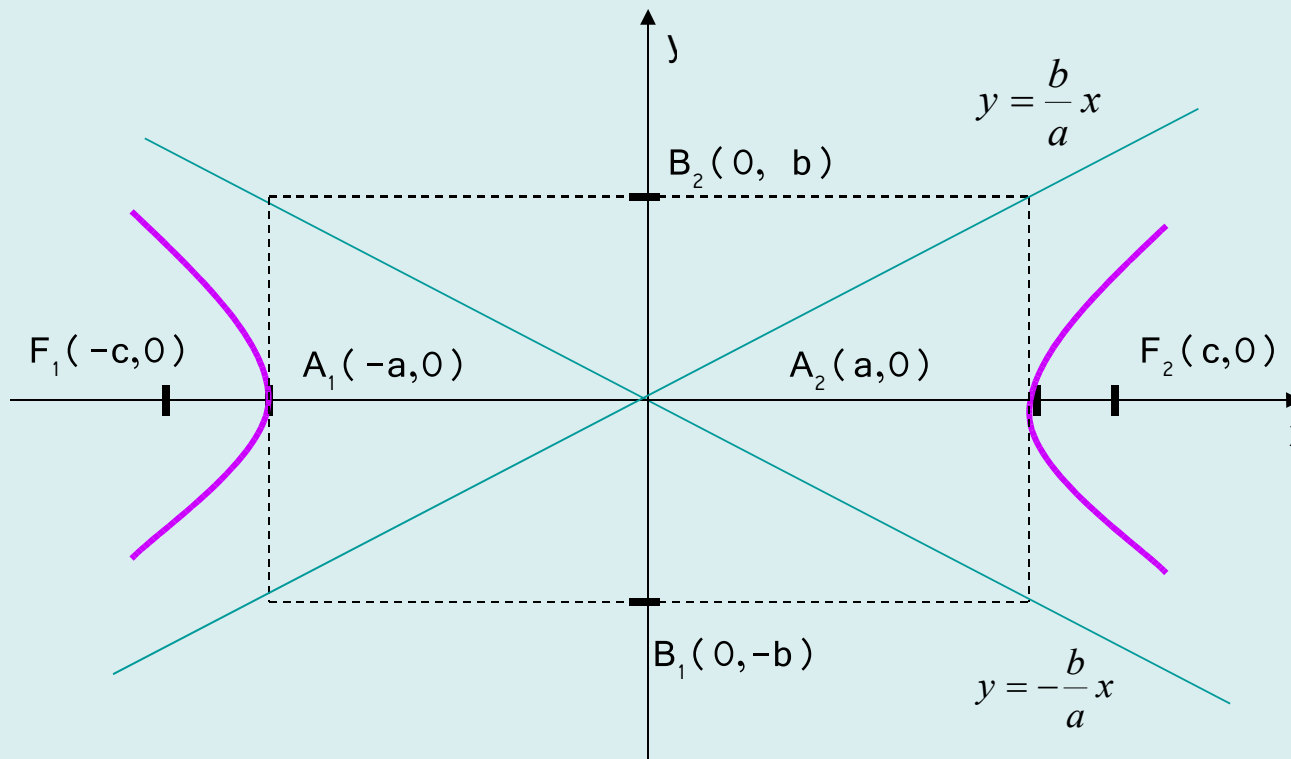
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se l'equazione canonica ha 1 a secondo membro, l'iperbole ha l'asse x come asse focale, il semiasse trasverso misura a e il semiasse non trasverso misura b



$$a < c$$

$$a^2 < c^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$

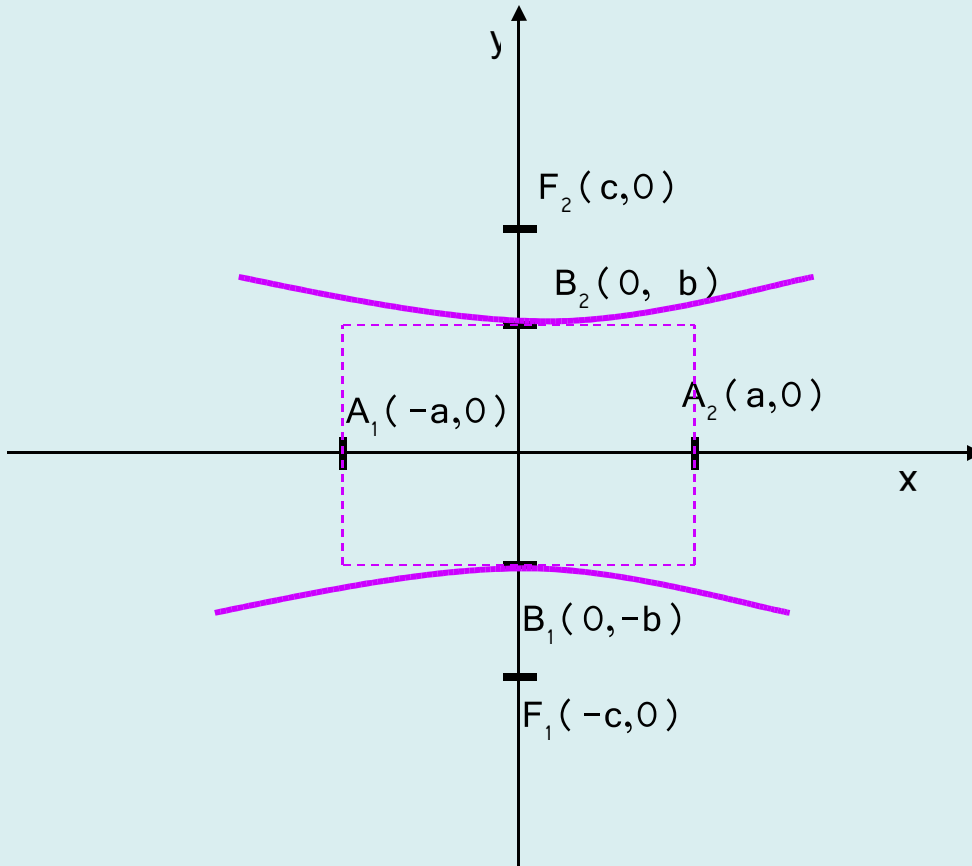
$$e > 1$$

IPERBOLE

Equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse y

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

Se l'equazione canonica ha -1 a secondo membro, l'iperbole ha l'asse y come asse focale, il semiasse trasverso misura b e il semiasse non trasverso misura a



$$b < c$$
$$b^2 < c^2$$
$$a^2 = c^2 - b^2$$

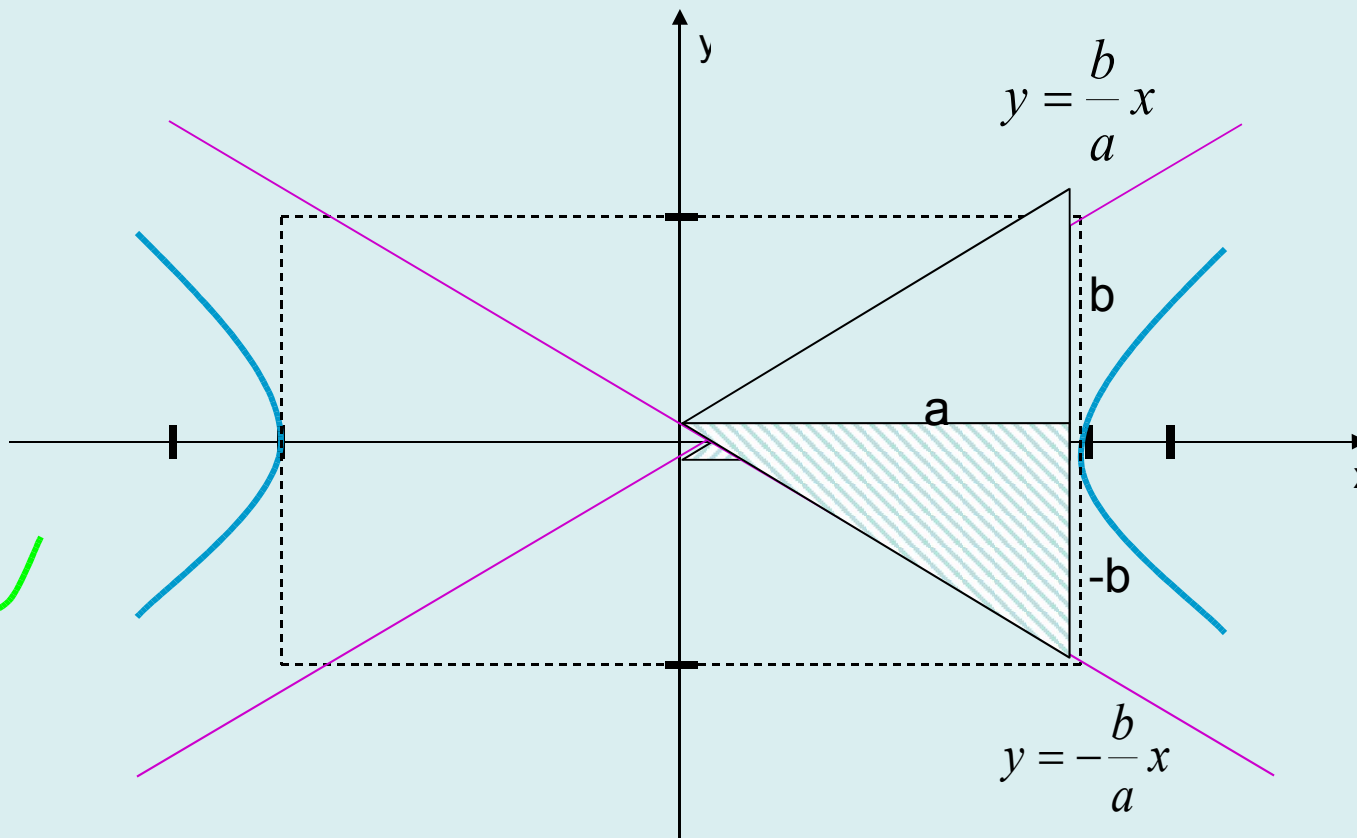
$$e = \frac{c}{b}$$
$$e > 1$$

IPERBOLE

Equazioni degli asintoti

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

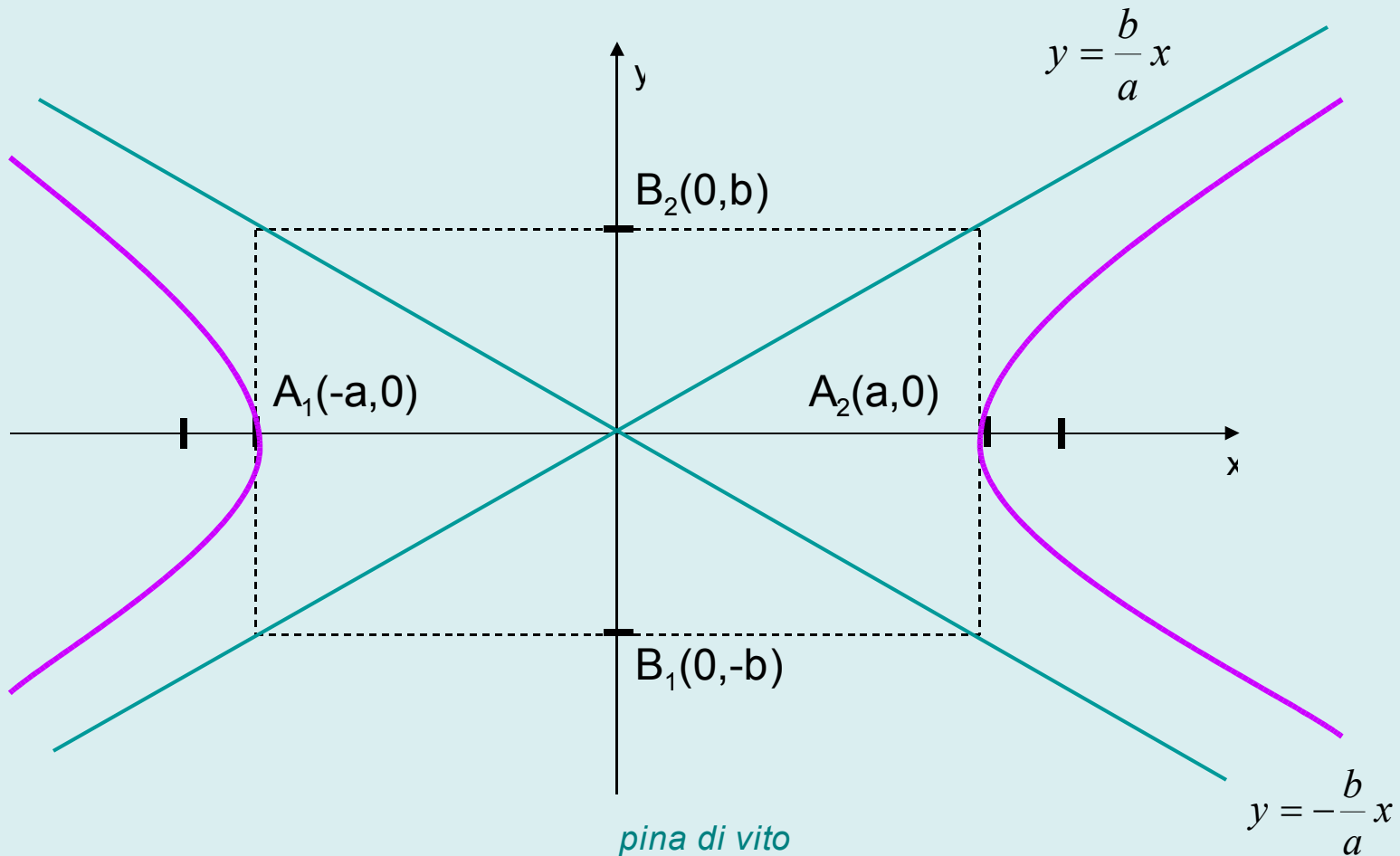
Procedimento operativo per trovare le equazioni degli asintoti dell'iperbole riferita ai propri assi.



IPERBOLE

Dall'equazione al grafico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



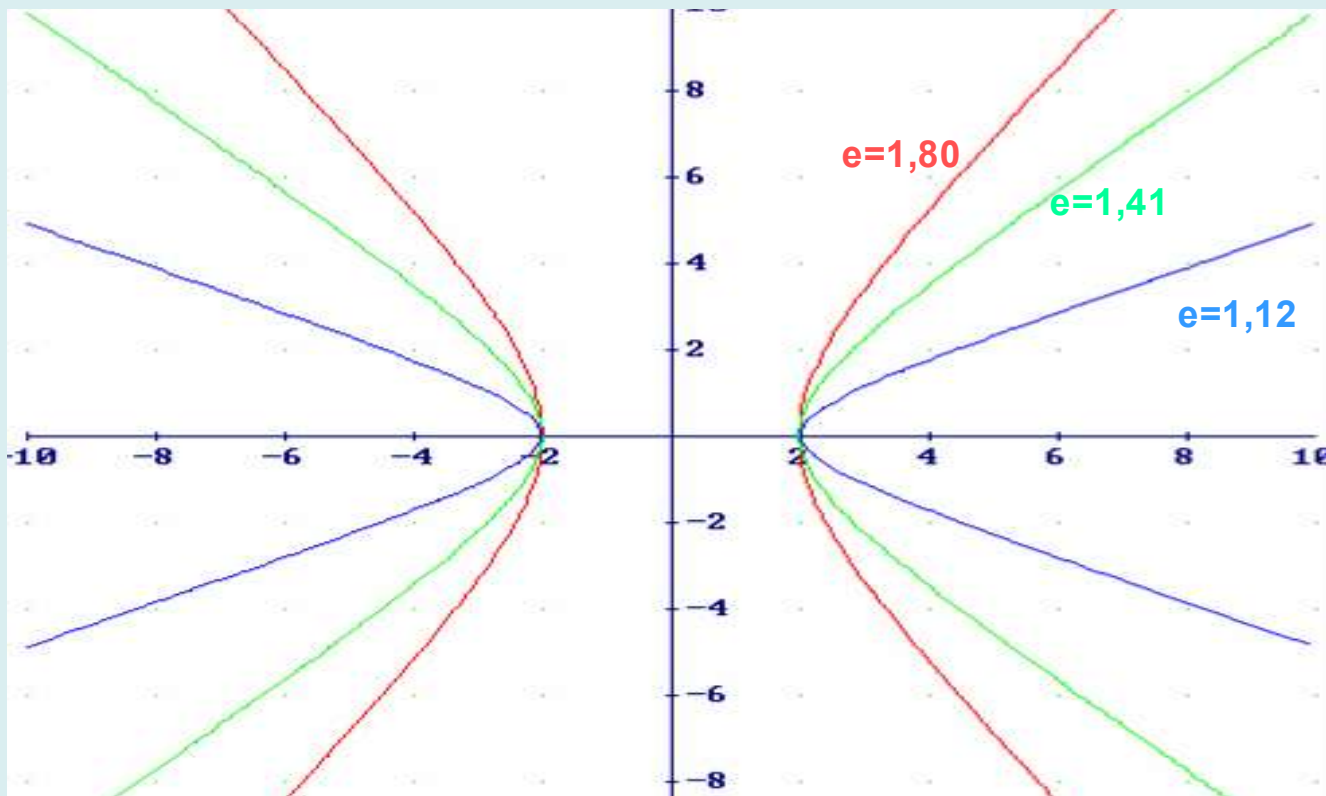
IPERBOLE

Eccentricità e apertura dell'iperbole

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad e = \frac{\sqrt{9+4}}{2} = 1,80$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad e = \frac{\sqrt{4+4}}{2} = 1,41$$

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1 \quad e = \frac{\sqrt{4+1}}{2} = 1,12$$

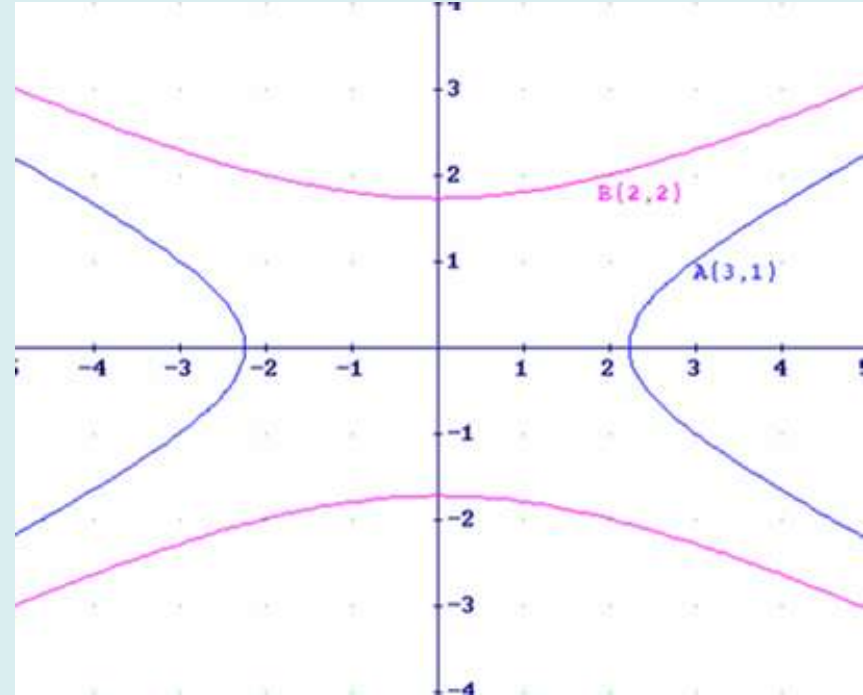


pina di vito

IPERBOLE

Esempio 1

Due iperboli \mathcal{I}_1 e \mathcal{I}_2 hanno gli stessi asintoti di equazione $y = \pm \frac{1}{2}x$. \mathcal{I}_1 passa per $A(3,1)$, \mathcal{I}_2 passa per $B(2,2)$. Determinare le equazioni delle due iperboli e disegnarle, dopo averne determinato le coordinate dei fuochi.



Suggerimento: se le due iperboli hanno gli stessi asintoti e non sono coincidenti, allora devono avere i fuochi su assi diversi. Consideriamo \mathcal{I}_1 con i fuochi sull'asse x e \mathcal{I}_2 con i fuochi sull'asse y.

$$\mathcal{I}_1 \quad \begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad a^2 = 5 \quad \wedge \quad b^2 = \frac{5}{4} \quad x^2 - 4y^2 = 5 \quad F\left(\pm \frac{5}{2}, 0\right)$$

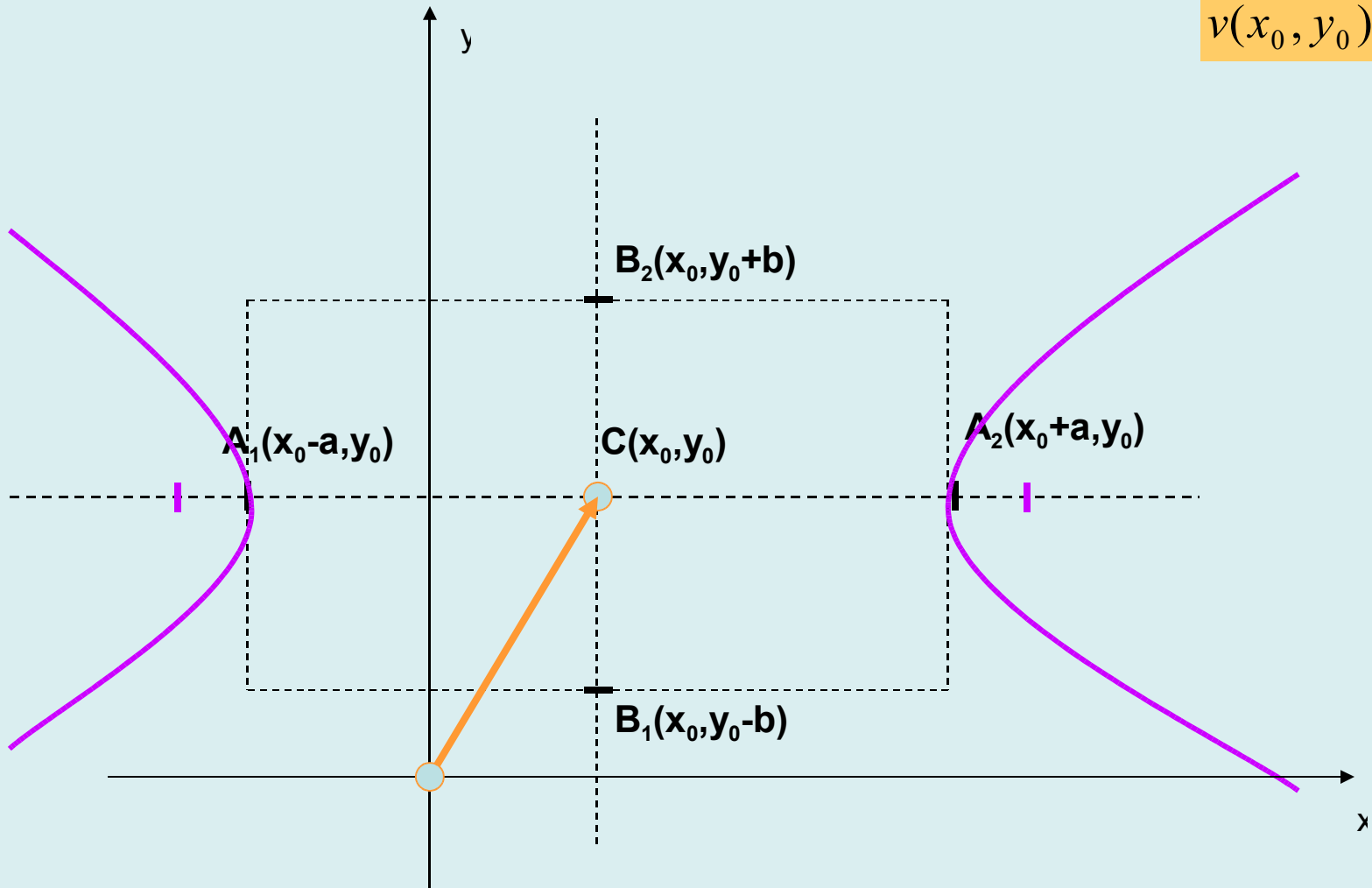
$$\mathcal{I}_2 \quad \begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{4}{b^2} = -1 \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad a^2 = 12 \quad \wedge \quad b^2 = 3 \quad x^2 - 4y^2 = -12 \quad F(0, \pm \sqrt{15})$$

Iperbole traslata

(riferita ad assi paralleli agli assi di simmetria)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

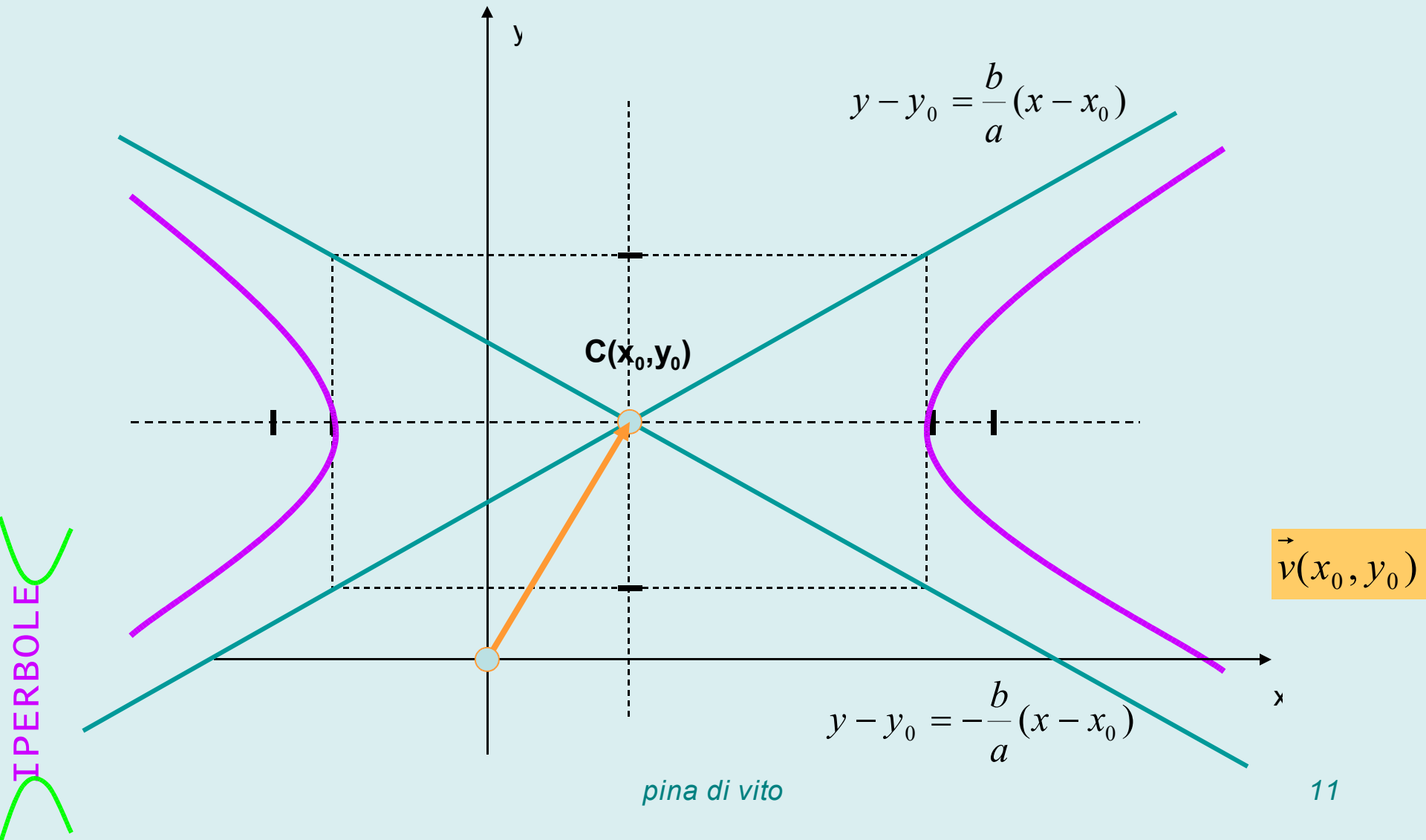
$$\vec{v}(x_0, y_0)$$



IPERBOLE

Iperbole traslata: equazioni degli asintoti

rette passanti per $C(x_0, y_0)$ e parallele agli asintoti dell'iperbole non traslata

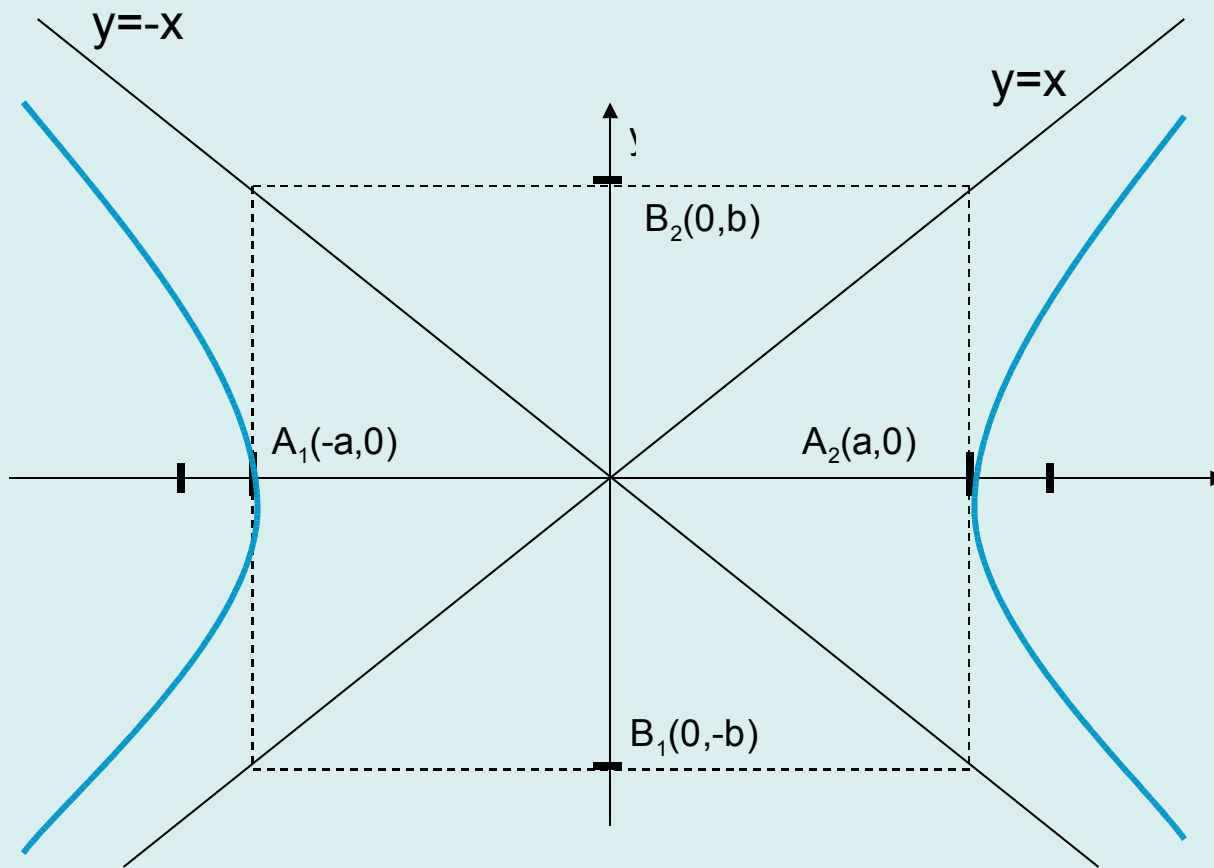


Iperbole equilatera riferita agli assi $a=b$

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$c = a\sqrt{2}$$

$$e = \sqrt{2}$$



IPERBOLE

Iperbole equilatera riferita agli asintoti

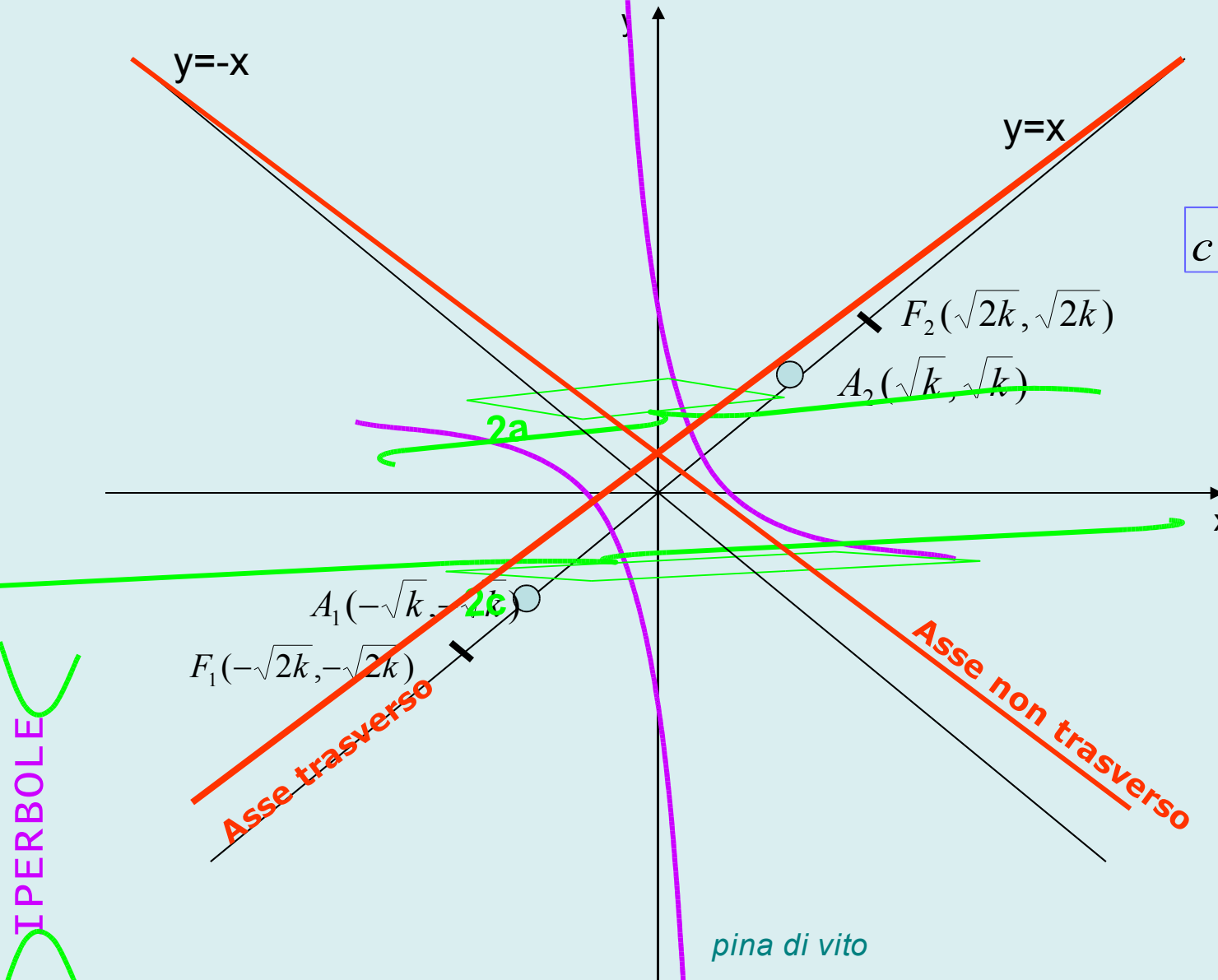
$$xy = k$$

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

$$c = a\sqrt{2}$$

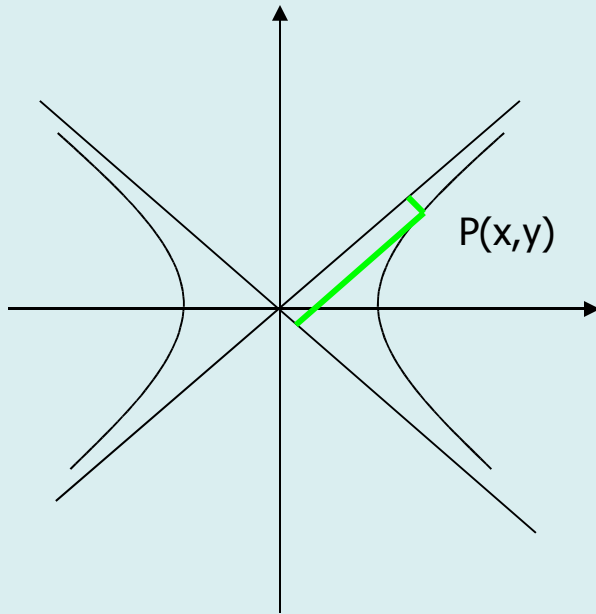
$$e = \sqrt{2}$$

$a=b$



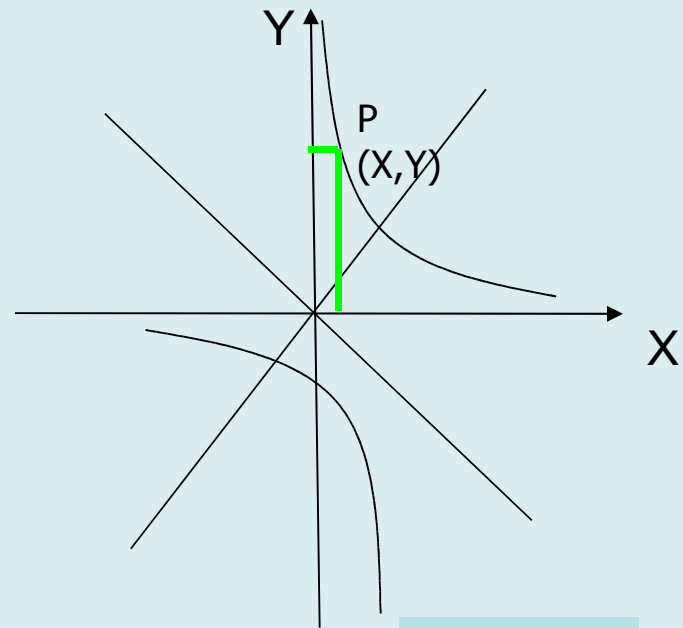
Iperbole equilatera riferita agli asintoti e iperbole equilatera riferita agli assi

$$area = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x^2 - y^2|}{2} = \frac{a^2}{2}$$



$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$area = |X| \cdot |Y|$$



$$XY = \pm \frac{a^2}{2}$$

IPERBOLE

Problema 2

Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera \mathcal{I}_1 riferita agli asintoti e passante per $A(-4,1)$.
Determinarne poi i semiassi, la semidistanza focale e le coordinate dei fuochi e dei vertici.

Suggerimento: L'equazione di \mathcal{I}_1 è del tipo $xy=k$

$$(-4) \cdot 1 = k \quad k = -4 \quad xy = -4$$

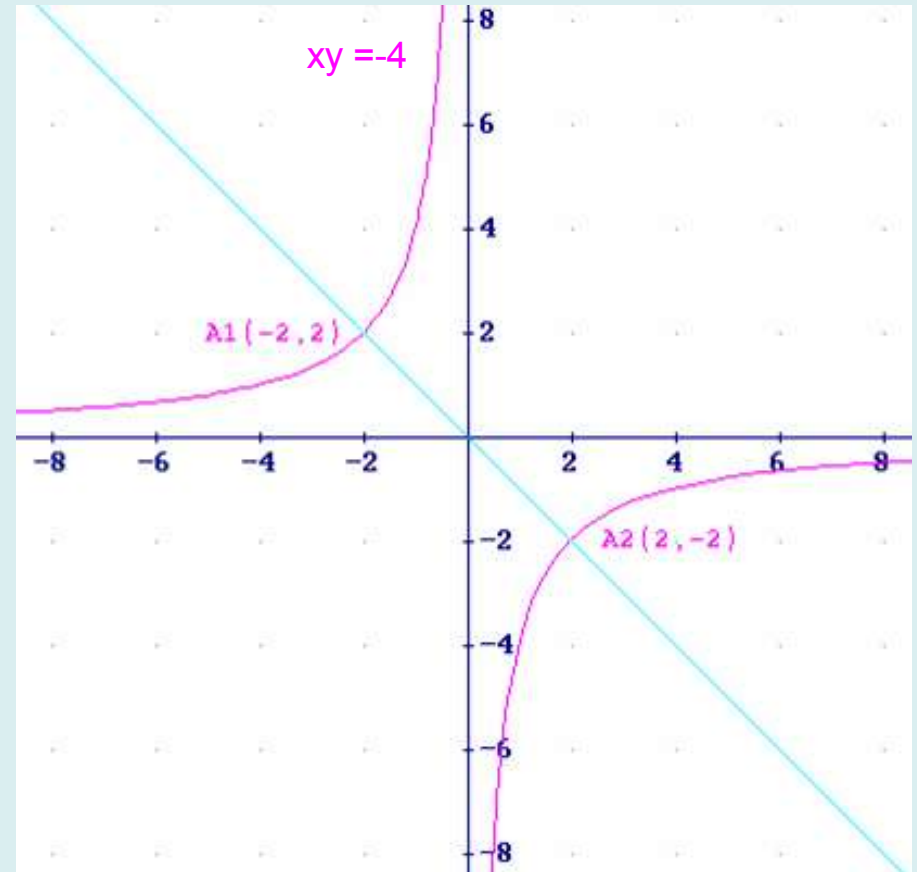
$$a = \sqrt{-2k} = \sqrt{-2(-4)} = 2\sqrt{2}$$

$$c = 2\sqrt{-k} = 2\sqrt{-(-4)} = 4$$

$$F_1(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \quad F_2(2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} xy = -4 \\ y = -x \end{cases} \quad \begin{cases} x(-x) = -4 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} x = \pm 2 \\ -- \end{cases}$$

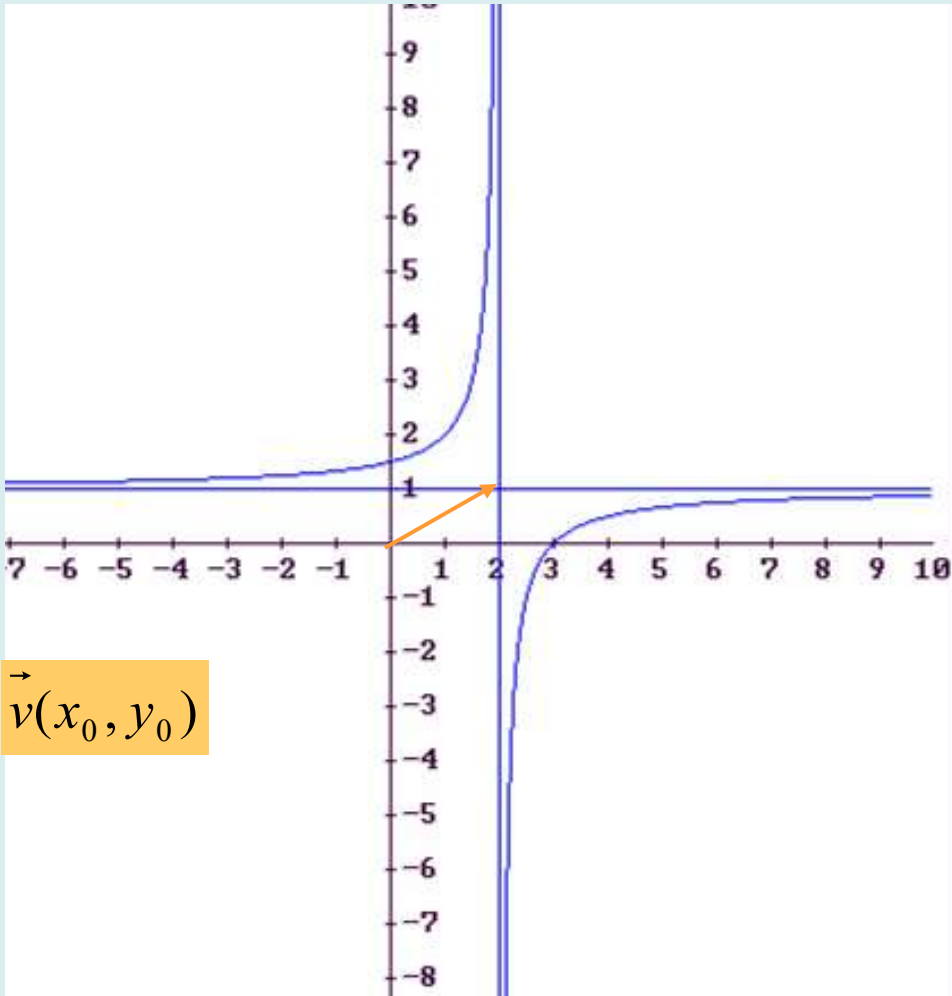
$$A_1(-2, 2) \quad A_2(2, -2)$$



Funzione omografica

$$(x - x_0)(y - y_0) = k$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{con } c \neq 0 \wedge ad - bc \neq 0$$



#1: $y = \frac{x - 3}{x - 2}$

#2: $x = 2$

#3: $y = 1$

Asintoti $x = -\frac{d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$

Centro di simmetria

$$C\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$$

IPERBOLE

Problema 3

Scrivere l'equazione della funzione omografica \mathcal{J} passante per $A(-4,1)$ e con centro in $C(-2,1)$. Determinarne poi l'equazione dell'asse trasverso e le coordinate dei vertici reali.

Suggerimento: L'equazione di \mathcal{J} è quella di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti e traslata, del tipo

$$(x - x_0)(y - y_0) = k$$

Sostituisco le coordinate del centro C

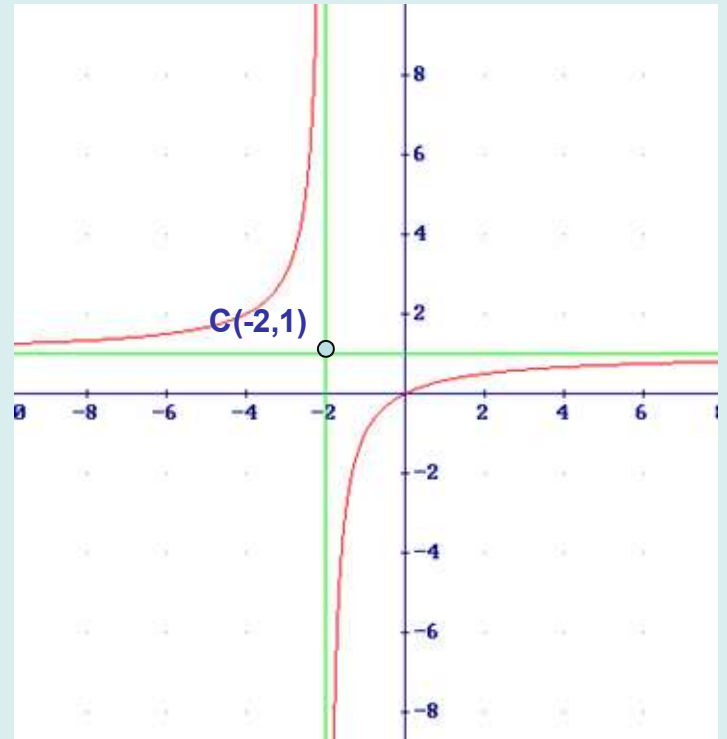
$$(x + 2)(y - 1) = k$$

Sostituisco le coordinate di A al fine di determinare k

$$(-4 + 2)(2 - 1) = k \quad k = -2$$

Ricavo l'equazione della funzione omografica

$$(x + 2)(y - 1) = -2 \quad y - 1 = \frac{-2}{x + 2} \quad y = \frac{-2 + x + 2}{x + 2} \quad y = \frac{x}{x + 2} \quad \text{passa per } O(0,0)$$



IPERBOLE

Continuazione del problema 3

L'iperbole è nel 2° e 4° quadrante, quindi l'asse trasverso ha equazione $y - y_0 = -(x - x_0)$, parallelo alla bisettrice e passante per $C(x_0, y_0)$

$$y - 1 = -(x + 2)$$

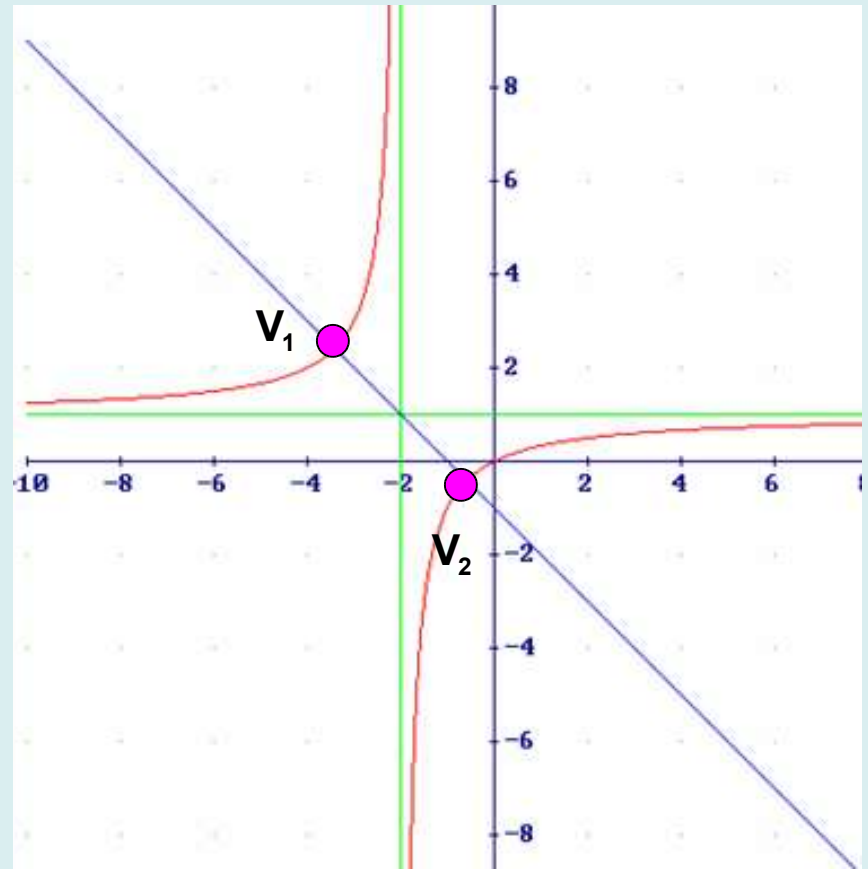
$$y = -x - 1$$

Metto a sistema con l'equazione dell'iperbole per determinare i vertici

$$\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = \frac{x}{x + 2} \end{cases}$$

$$V_1(-2 - \sqrt{2}, -3 - \sqrt{2})$$

$$V_2(-2 + \sqrt{2}, -3 + \sqrt{2})$$



IPERBOLE