Geometria analitica

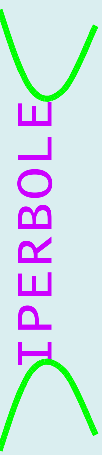
Retta

Circonferenza

Parabola

Ellisse

Iperbole



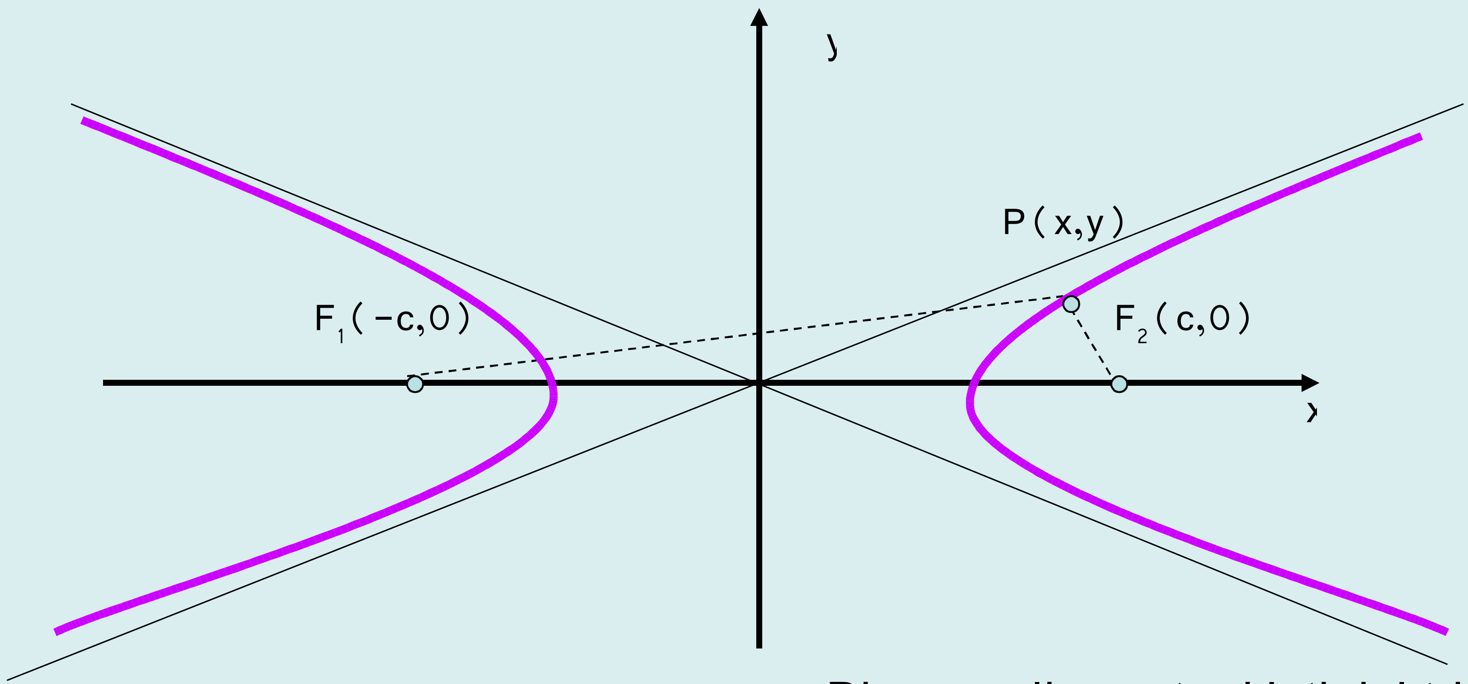
Iperbole come luogo geometrico

L'iperbole è una curva piana aperta, luogo geometrico dei punti per i quali il valore assoluto della differenza tra le distanze da due punti fissi del piano, detti fuochi, è costante

$$\left| \overline{PF}_1 - \overline{PF}_2 \right| = 2a$$

$$\overline{F_1F_2} = 2c$$

$$\overline{F_1F}_2 > \left| \overline{PF}_1 - \overline{PF}_2 \right|$$



Disuguaglianza tra i lati del triangolo F_1PF_2

$$2c > 2a$$

Ricavo l’equazione canonica

$$\left|\overline{PF}_1 - \overline{PF}_2\right| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a\right)^2$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = (c^2 - a^2)a^2$$

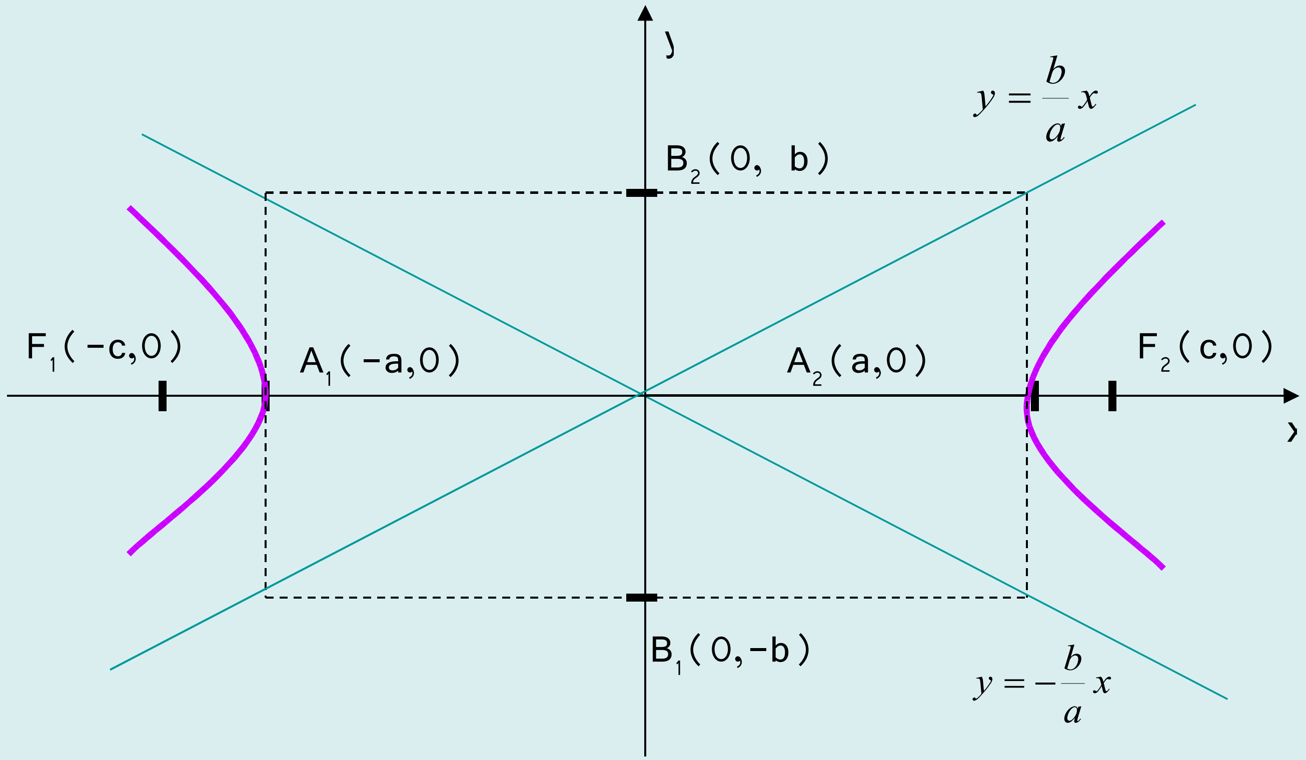
Pongo $b^2 = c^2 - a^2$ *e divido per* a^2b^2

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se l'equazione canonica ha 1 a secondo membro, l'iperbole ha l'asse x come asse focale, il semiasse trasverso misura a e il semiasse non trasverso misura b



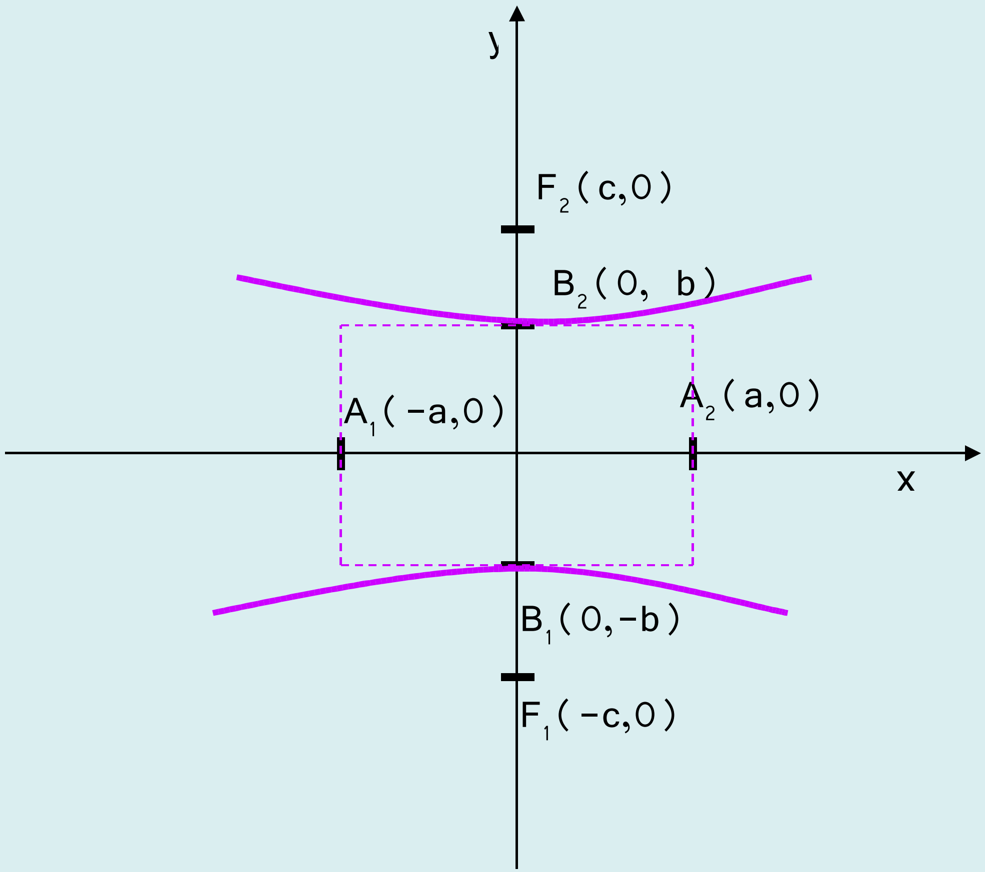
$$a < c$$
$$a^2 < c^2$$
$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$
$$e > 1$$

Equazione canonica dell'iperbole con i fuochi sull'asse y

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

Se l'equazione canonica ha -1 a secondo membro, l'iperbole ha l'asse y come asse focale, il semiasse trasverso misura b e il semiasse non trasverso misura a



$$\boxed{\begin{array}{l} b<c \\ b^2<c^2 \\ a^2=c^2-b^2 \end{array}}$$

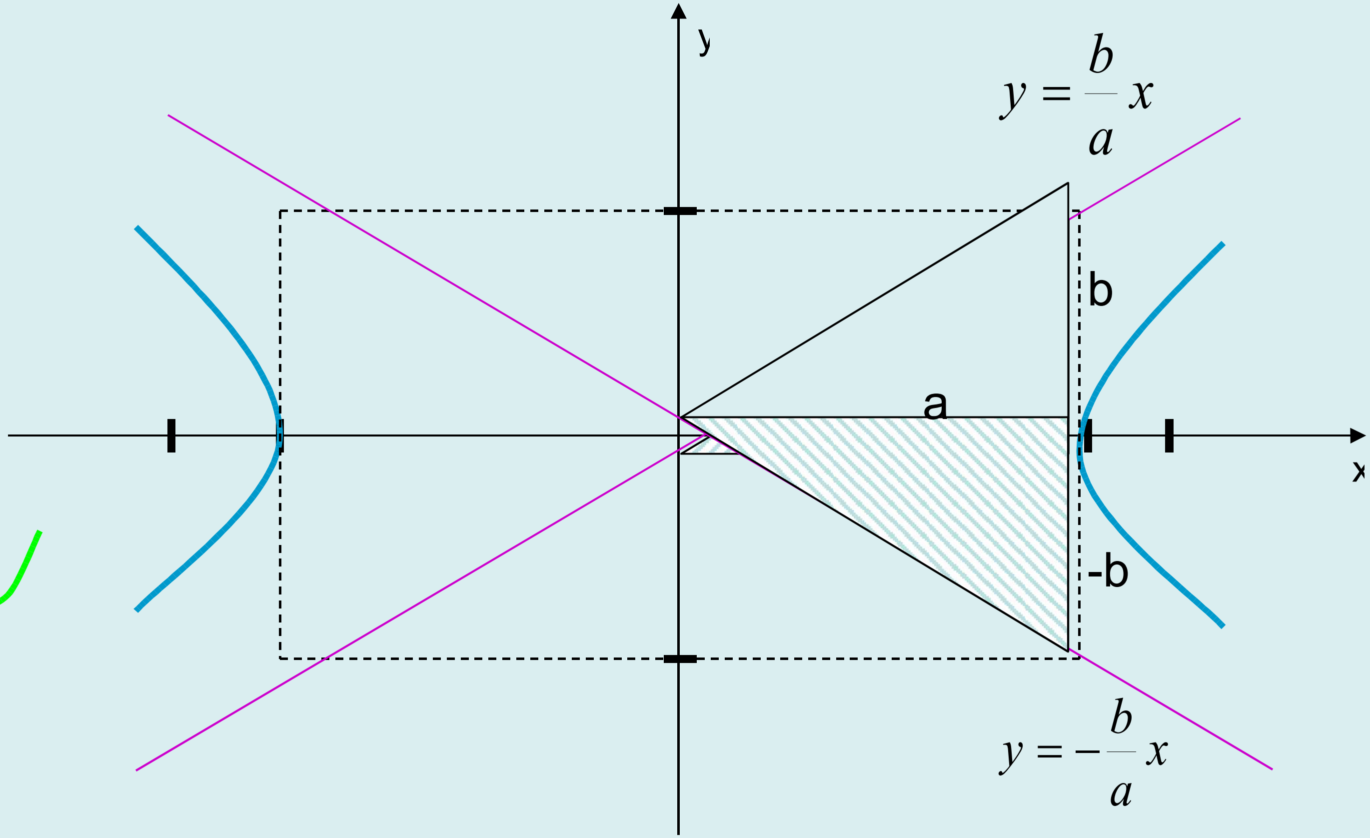
$$\boxed{\begin{array}{l} e=\dfrac{c}{b} \\ e>1 \end{array}}$$

IPERBOLE

Equazioni degli asintoti

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$$

Procedimento operativo per trovare le equazioni degli asintoti dell'iperbole riferita ai propri assi.



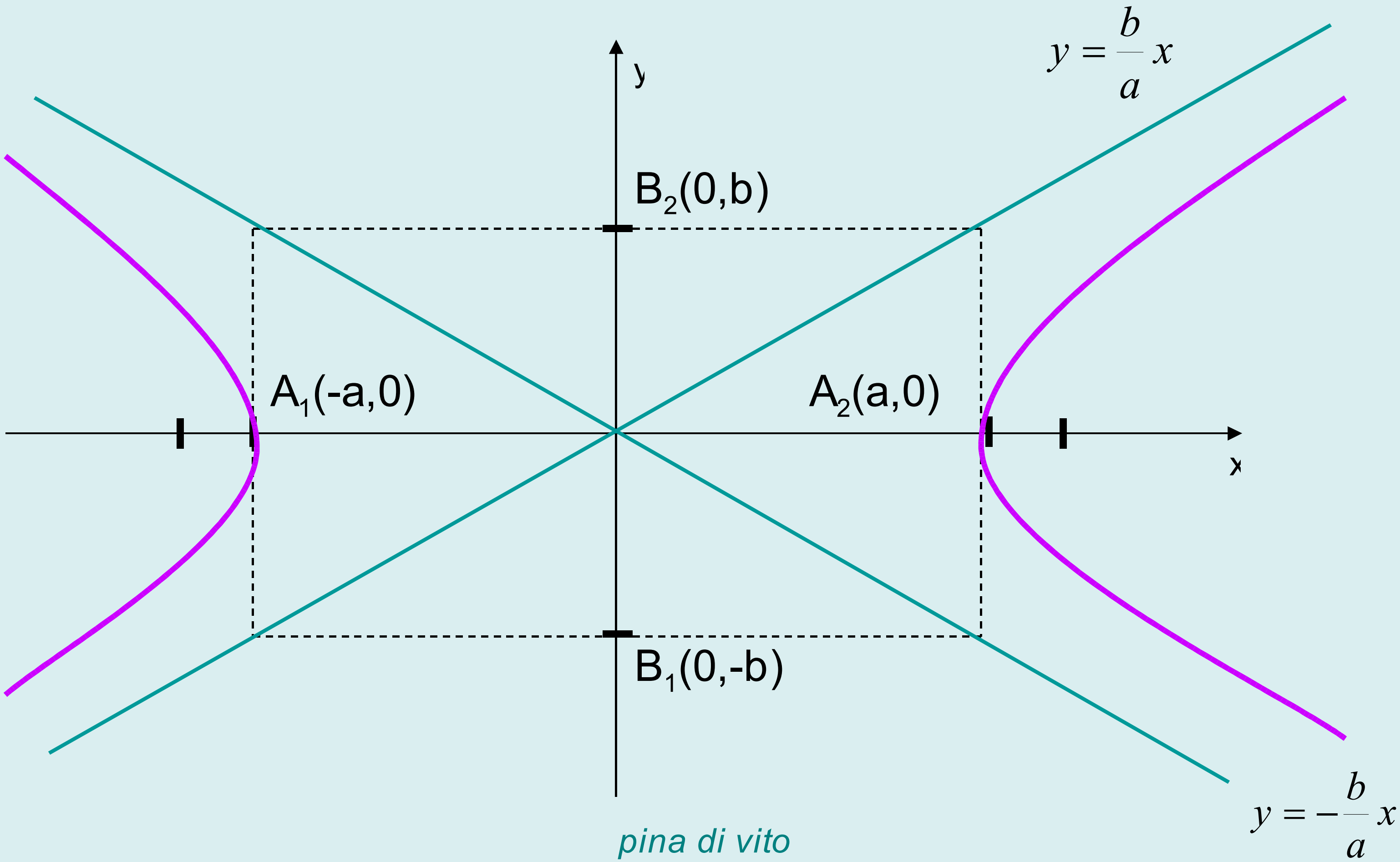
$$y = \frac{b}{a}x$$

$$y = -\frac{b}{a}x$$

IPERBOLE

Dall'equazione al grafico

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

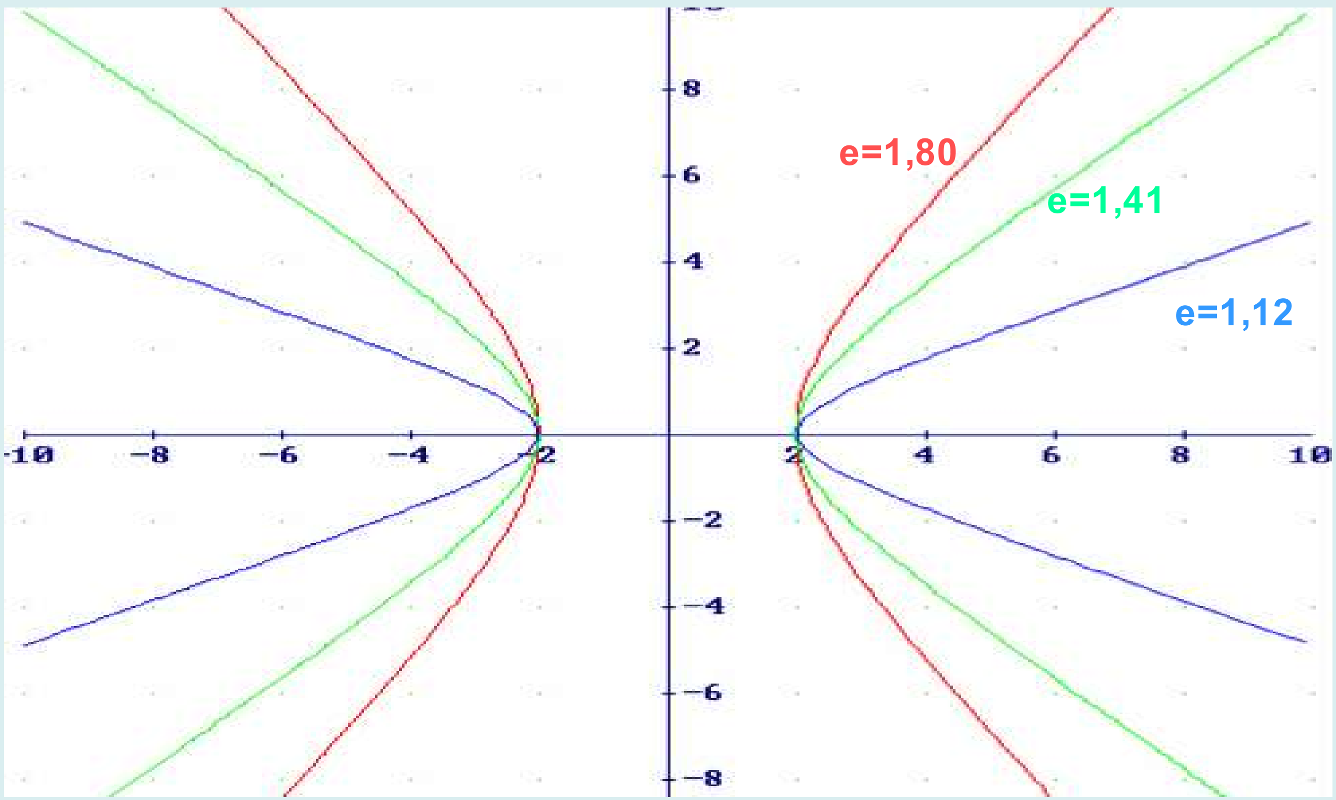


Eccentricità e apertura dell’iperbole

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1 \qquad e=\frac{\sqrt{9+4}}{2}=1{,}80$$

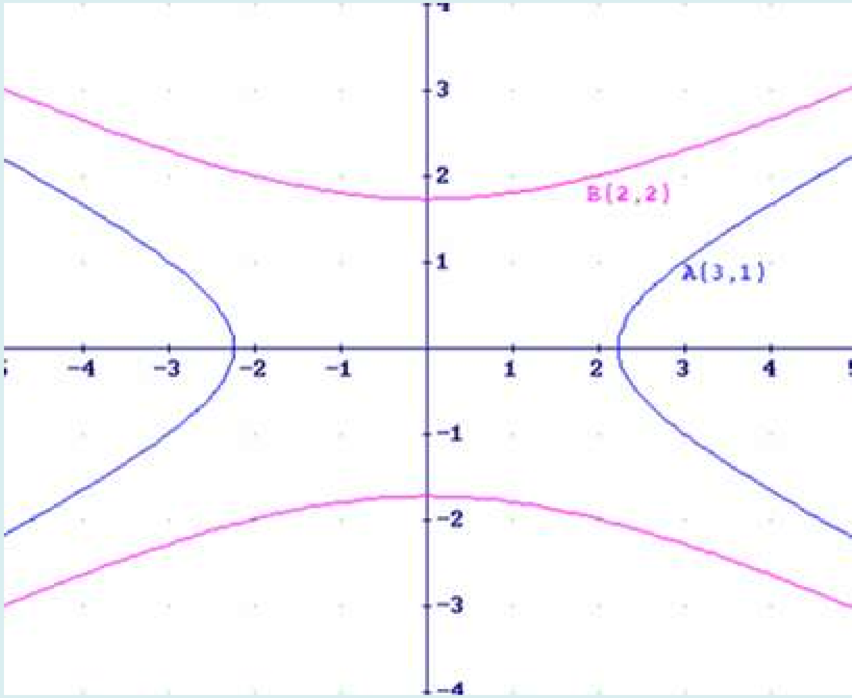
$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1 \qquad e=\frac{\sqrt{4+4}}{2}=1{,}41$$

$$\frac{x^2}{4}-y^2=1 \qquad e=\frac{\sqrt{4+1}}{2}=1{,}12$$



Esempio 1

Due iperboli $\mathfrak{I}_1$ e $\mathfrak{I}_2$ hanno gli stessi asintoti di equazione $y = \pm\frac{1}{2}x$ $\mathfrak{I}_1$ passa per A(3,1), $\mathfrak{I}_2$ passa per B(2,2). Determinare le equazioni delle due iperboli e disegnarle, dopo averne determinato le coordinate dei fuochi.



Suggerimento: se le due iperboli hanno gli stessi asintoti e non sono coincidenti, allora devono avere i fuochi su assi diversi. Consideriamo $\mathfrak{I}_1$ con i fuochi sull'asse x e $\mathfrak{I}_2$ con i fuochi sull'asse y.

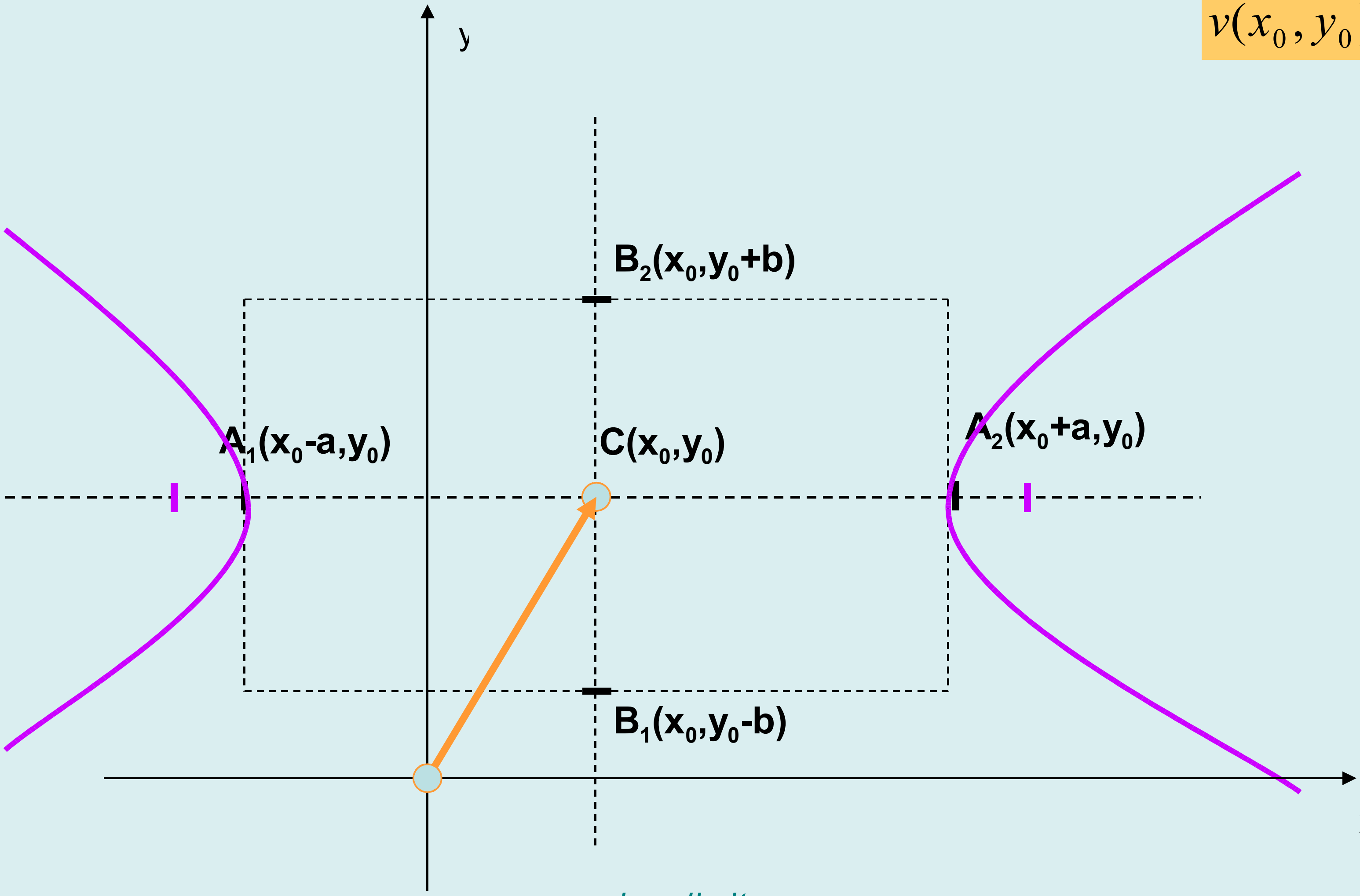
$$\mathfrak{I}_1 \quad \begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \mathrm{a}^2 = 5 \quad \wedge \quad \mathrm{b}^2 = \frac{5}{4} \qquad \mathrm{x}^2 - 4y^2 = 5 \qquad \mathrm{F}\left(\pm\frac{5}{2},0\right)$$

$$\mathfrak{I}_2 \quad \begin{cases} \frac{4}{a^2} - \frac{4}{b^2} = -1 \\ \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \end{cases} \rightarrow \mathrm{a}^2 = 12 \quad \wedge \quad \mathrm{b}^2 = 3 \qquad \mathrm{x}^2 - 4y^2 = -12 \qquad \mathrm{F}\left(0,\pm\sqrt{15}\right)$$

Iperbole traslata
(riferita ad assi paralleli agli assi di simmetria)

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

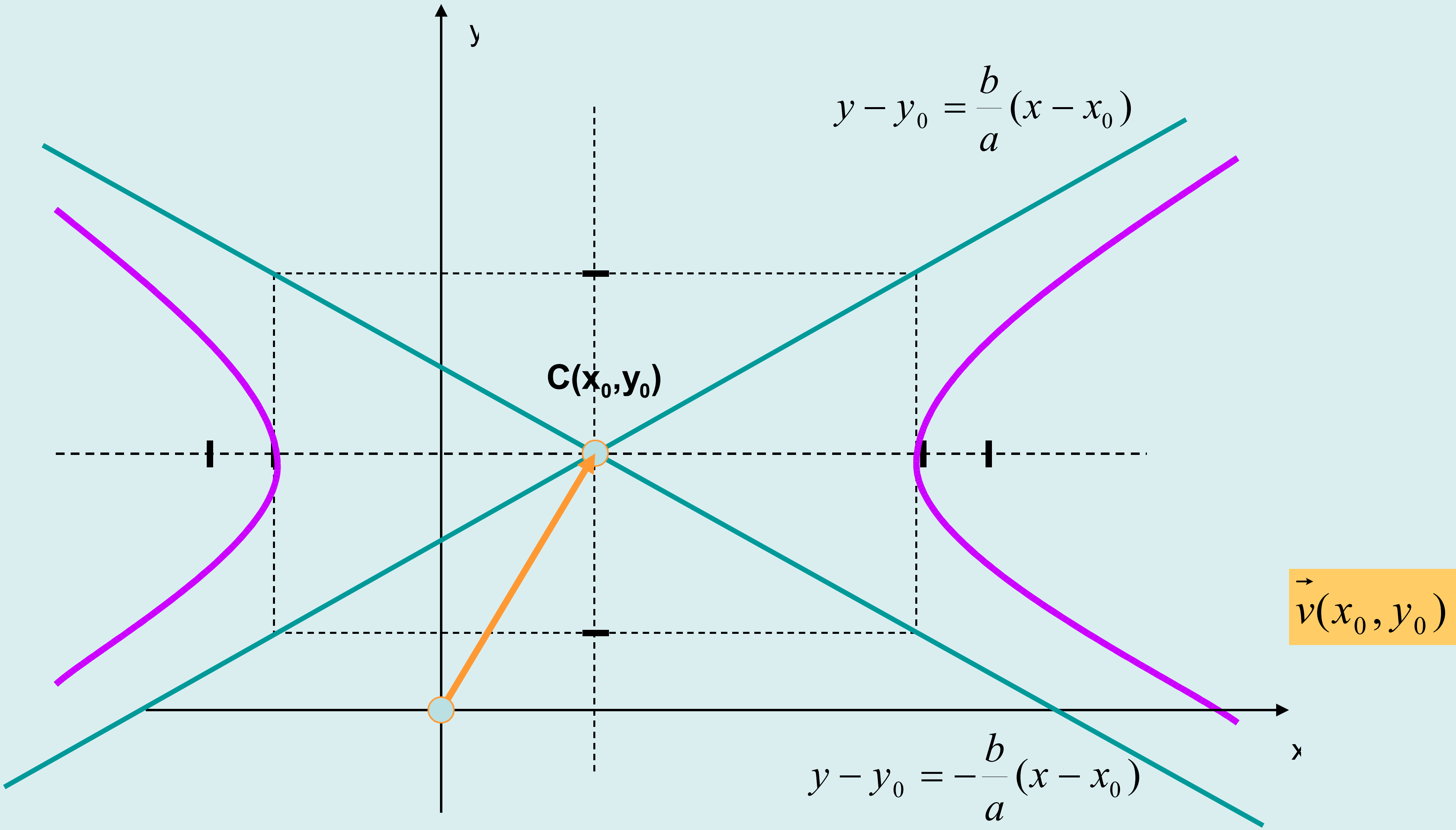
$$\vec{v}(x_0, y_0)$$



IPERBOLE

Iperbole traslata: equazioni degli asintoti

rette passanti per $C(x_0,y_0)$ e parallele agli asintoti dell'iperbole non traslata

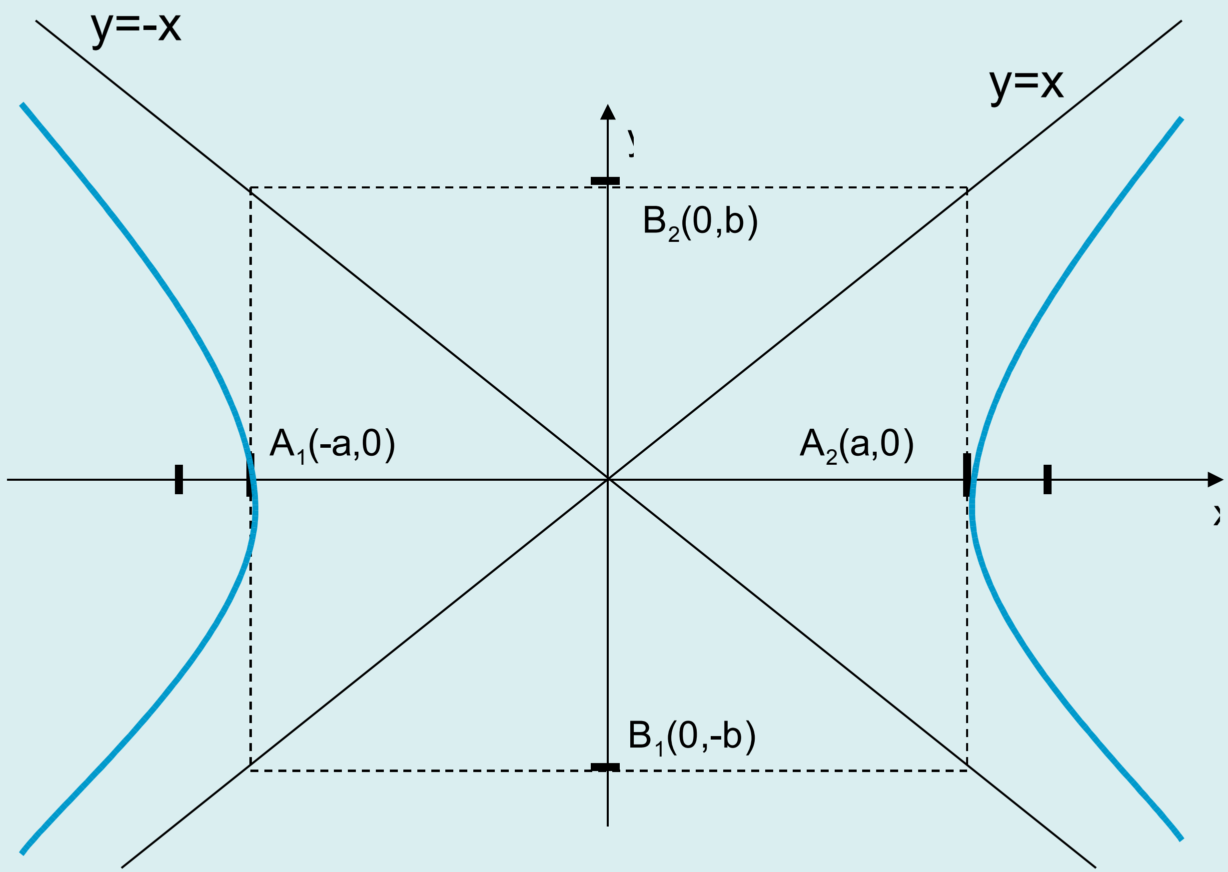


Iperbole equilatera riferita agli assi a=b

$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$c = a\sqrt{2}$$

$$e = \sqrt{2}$$



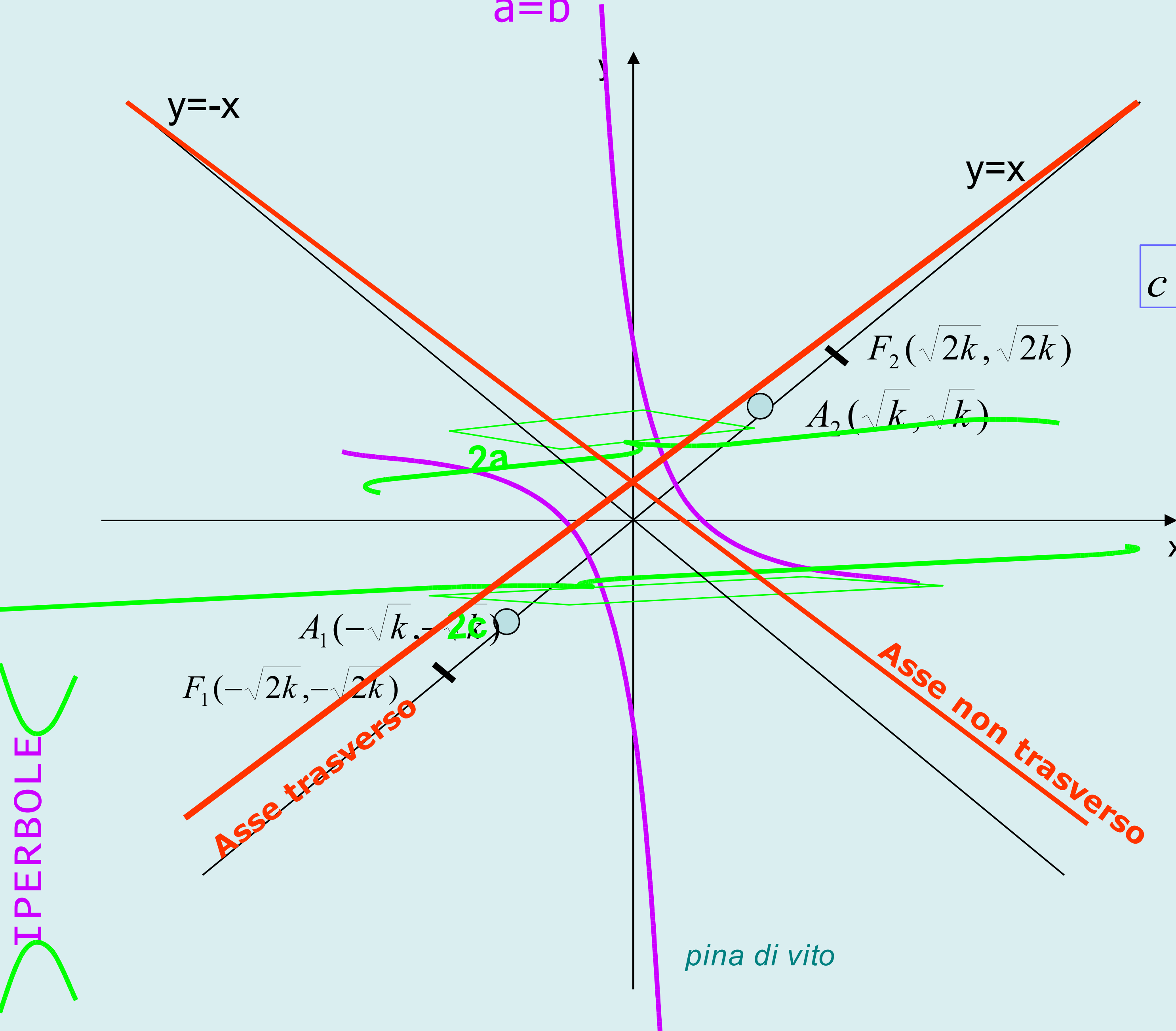
IPERBOLE

Iperbole equilatera riferita agli asintoti
a=b

$$xy = k$$

$$xy = \frac{a^2}{2}$$

$$\boxed{c = a\sqrt{2}} \qquad \boxed{e = \sqrt{2}}$$

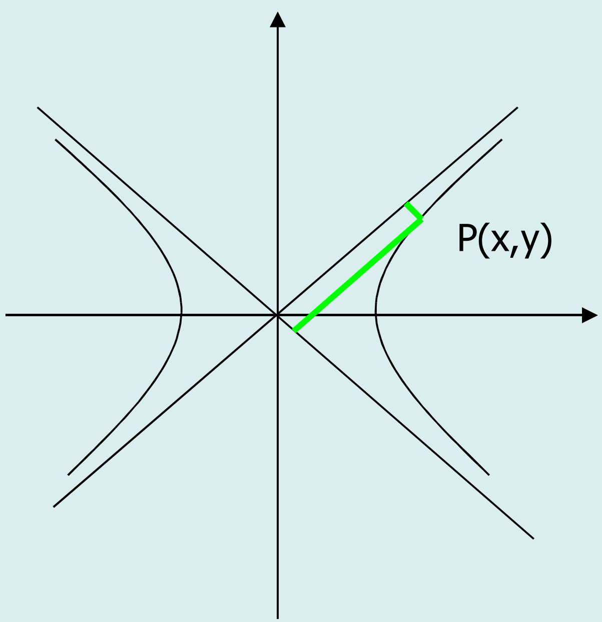


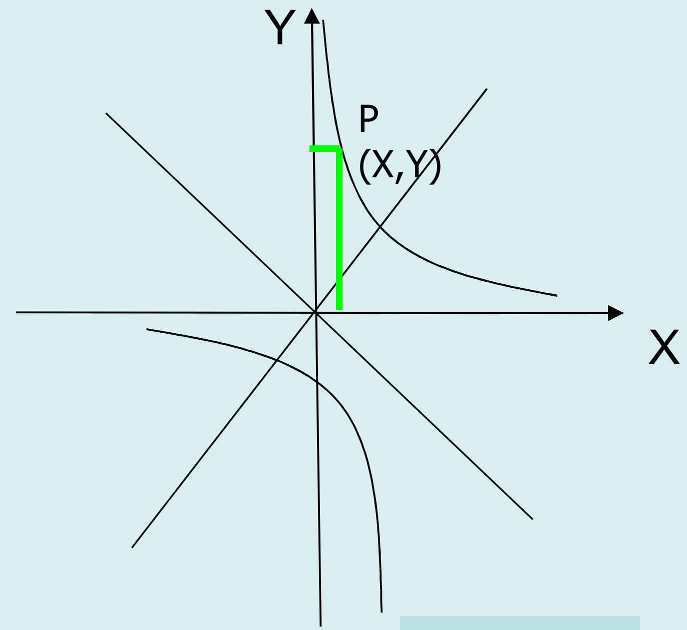
IPERBOLE

Iperbole equilatera riferita agli asintoti
e
iperbole equilatera riferita agli assi

$$area = \frac{|x-y|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x+y|}{\sqrt{2}} = \frac{|x^2-y^2|}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$area = |X| \cdot |Y|$$





$$x^2 - y^2 = a^2$$

$$XY = \pm \frac{a^2}{2}$$

Problema 2

Scrivere l'equazione dell'iperbole equilatera $\Im_1$ riferita agli asintoti e passante per A(-4,1). Determinarne poi i semiassi, la semidistanza focale e le coordinate dei fuochi e dei vertici.

Suggerimento: L'equazione di $\Im_1$ è del tipo xy=k

$$(-4)\cdot 1 = k \qquad k=-4 \qquad xy=-4$$

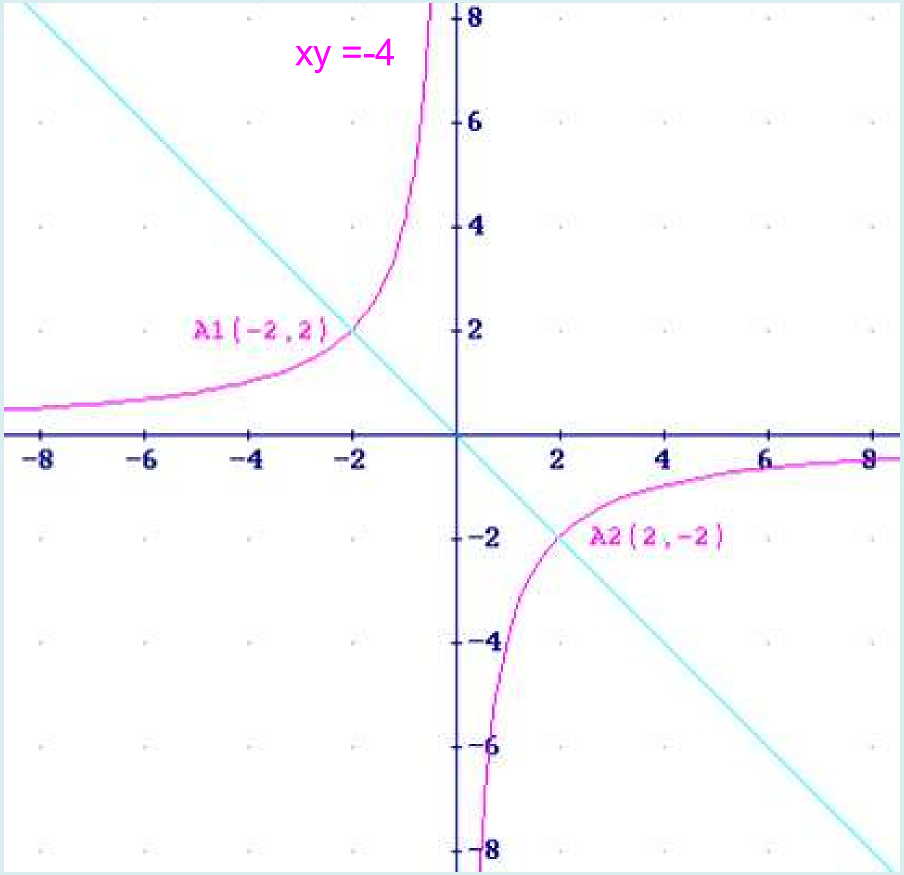
$$a=\sqrt{-2k}=\sqrt{-2(-4)}=2\sqrt{2}$$

$$c=2\sqrt{-k}=2\sqrt{-(-4)}=4$$

$$F_1(-2\sqrt{2},2\sqrt{2}) \qquad F_2(2\sqrt{2},-2\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} xy=-4 \\ y=-x \end{cases} \qquad \begin{cases} x(-x)=-4 \\ -- \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\pm 2 \\ -- \end{cases}$$

$$A_1(-2,2) \qquad A_2(2,-2)$$

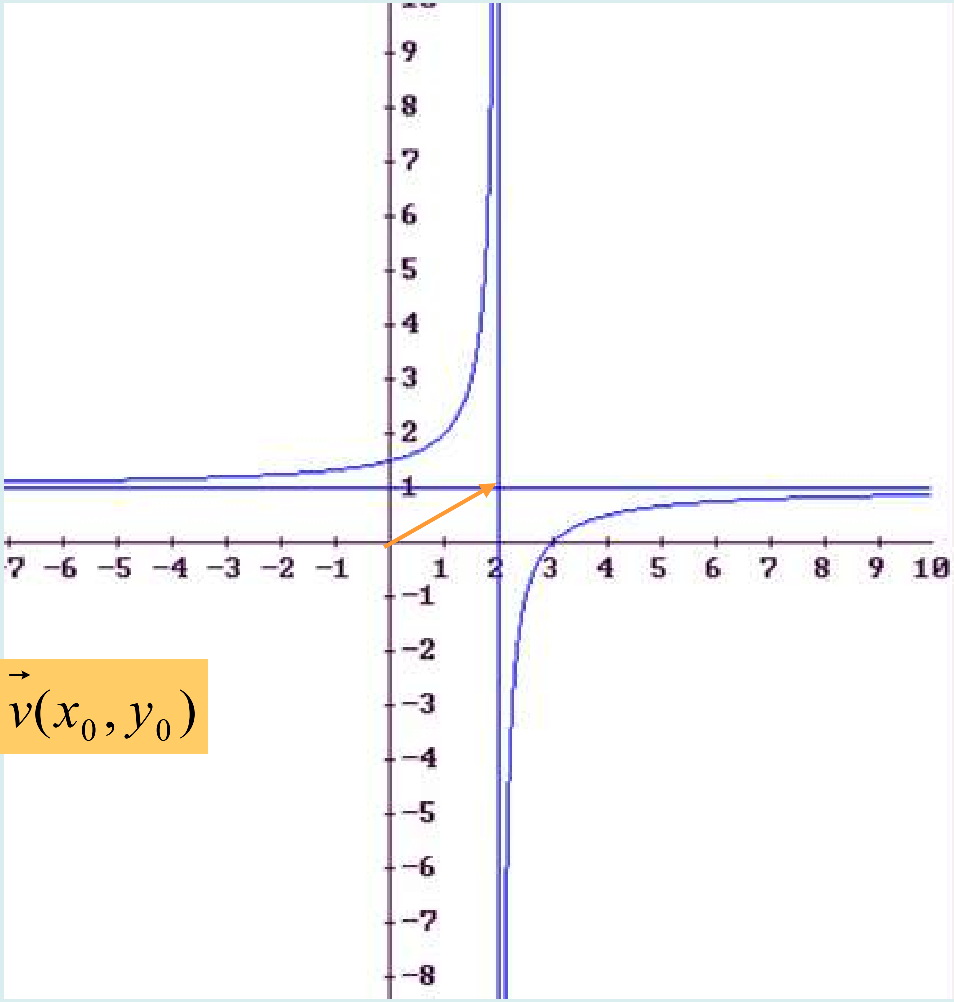


IPERBOLE

Funzione omografica

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{con} \quad c \neq 0 \ \wedge \ ad\text{-}bc \neq 0$$

$$(x - x_0)(y - y_0) = k$$



$\vec{v}(x_0, y_0)$

#1: $y = \frac{x-3}{x-2}$

#2: $x = 2$

#3: $y = 1$

Asintoti $x = -\frac{d}{c}$ $y = \frac{a}{c}$

Centro di simmetria

$C(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$

IPERBOLE

Problema 3

Scrivere l'equazione della funzione omografica $\mathfrak{I}$ passante per A(-4,1) e con centro in C(-2,1). Determinarne poi l'equazione dell'asse trasverso e le coordinate dei vertici reali.

Suggerimento: L'equazione di $\mathfrak{I}$ è quella di un'iperbole equilatera riferita agli asintoti e traslata, del tipo

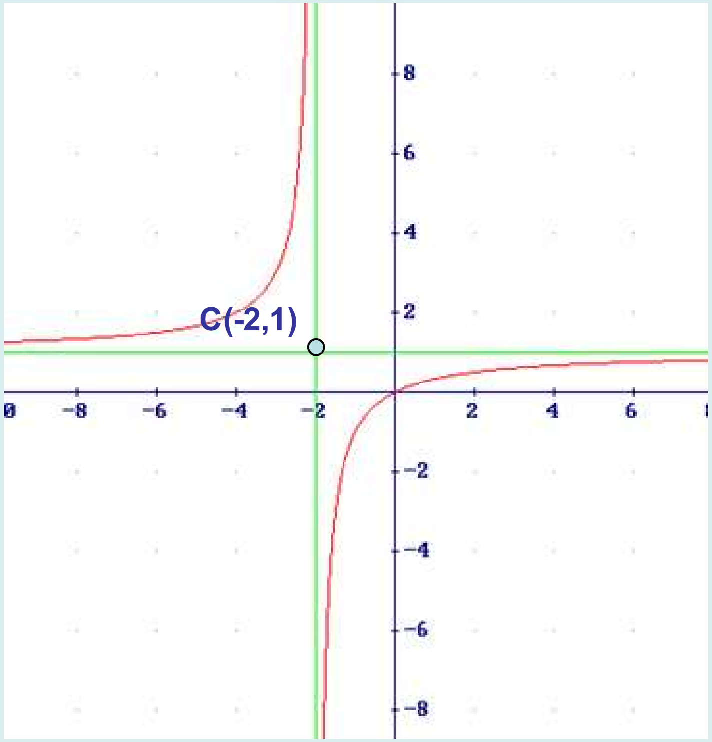
$$(x-x_0)(y-y_0)=k$$

Sostituisco le coordinate del centro C

$$(x+2)(y-1)=k$$

Sostituisco le coordinate di A al fine di determinare k

$$(-4+2)(2-1)=k \qquad k=-2$$



Ricavo l'equazione della funzione omografica

$$(x+2)(y-1)=-2 \qquad y-1=\frac{-2}{x+2} \qquad y=\frac{-2+x+2}{x+2} \qquad y=\frac{x}{x+2}$$

passa per O(0,0)

Continuazione del problema 3

L'iperbole è nel 2° e 4° quadrante, quindi l'asse trasverso ha equazione $y-y_0=-(x-x_0)$, parallelo alla bisettrice e passante per $C(x_0,y_0)$

$$y-1=-(x+2)$$
$$y=-x-1$$

Metto a sistema con l'equazione dell'iperbole per determinare i vertici

$$\begin{cases} y=-x-1 \\ y=\dfrac{x}{x+2} \end{cases}$$

$$V_1(-2-\sqrt{2},-3-\sqrt{2})$$

$$V_2(-2+\sqrt{2},-3+\sqrt{2})$$