Geometria analitica

Retta

Circonferenza

Parabola

Ellisse

Iperbole

ELLISSE

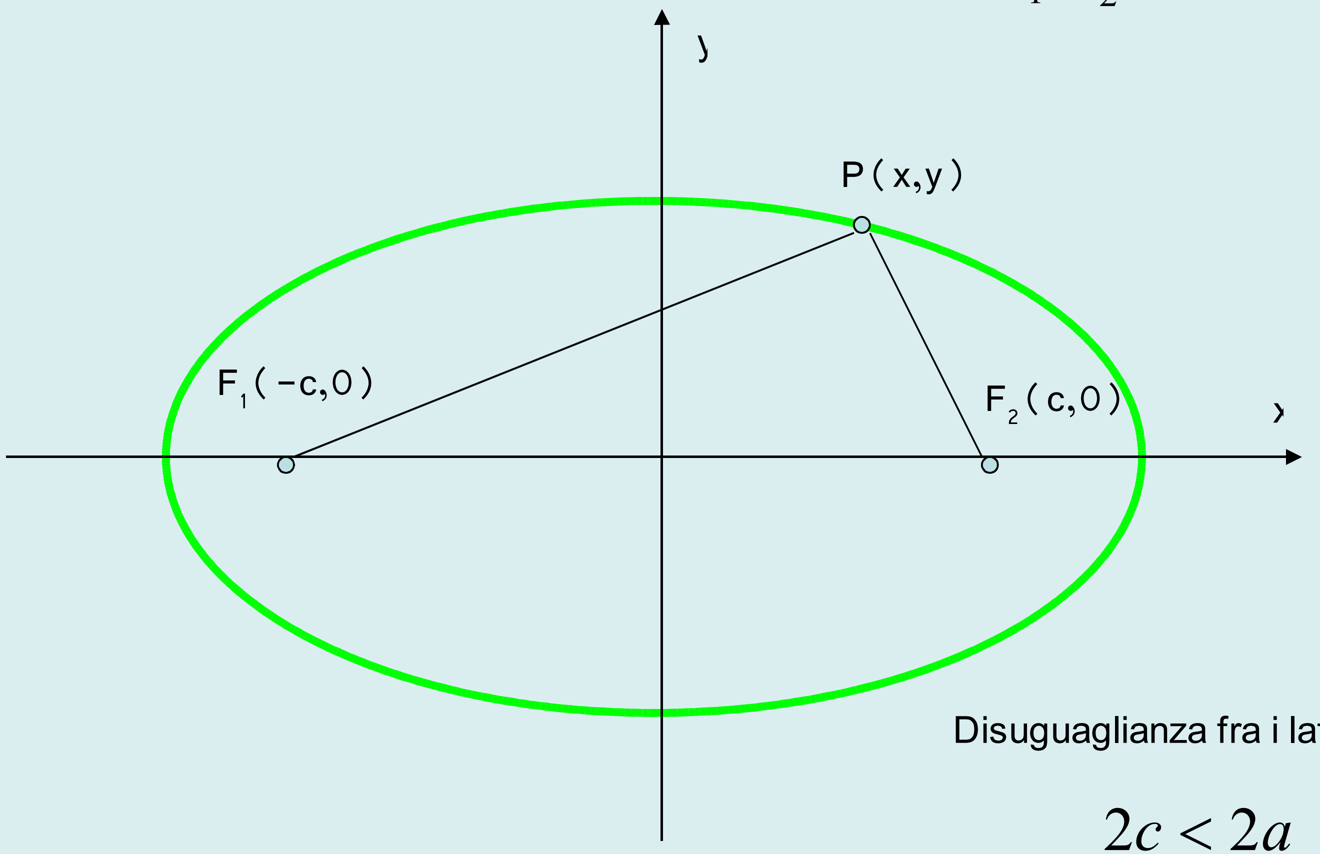
Ellisse come luogo geometrico

L'ellisse è una curva piana chiusa, luogo geometrico dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti fissi del piano, detti fuochi, è costante

$$\overline{PF}_1 + \overline{PF}_2 = 2a$$

$$\overline{F_1F_2} = 2c$$

$$\overline{F_1F}_2 < \overline{PF}_1 + \overline{PF}_2$$



Disuguaglianza fra i lati del triangolo

$$2c < 2a$$

Ricavo l'equazione canonica

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(-\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a\right)^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2$$

Pongo $b^2 = a^2 - c^2$ *e divido per* a^2b^2

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

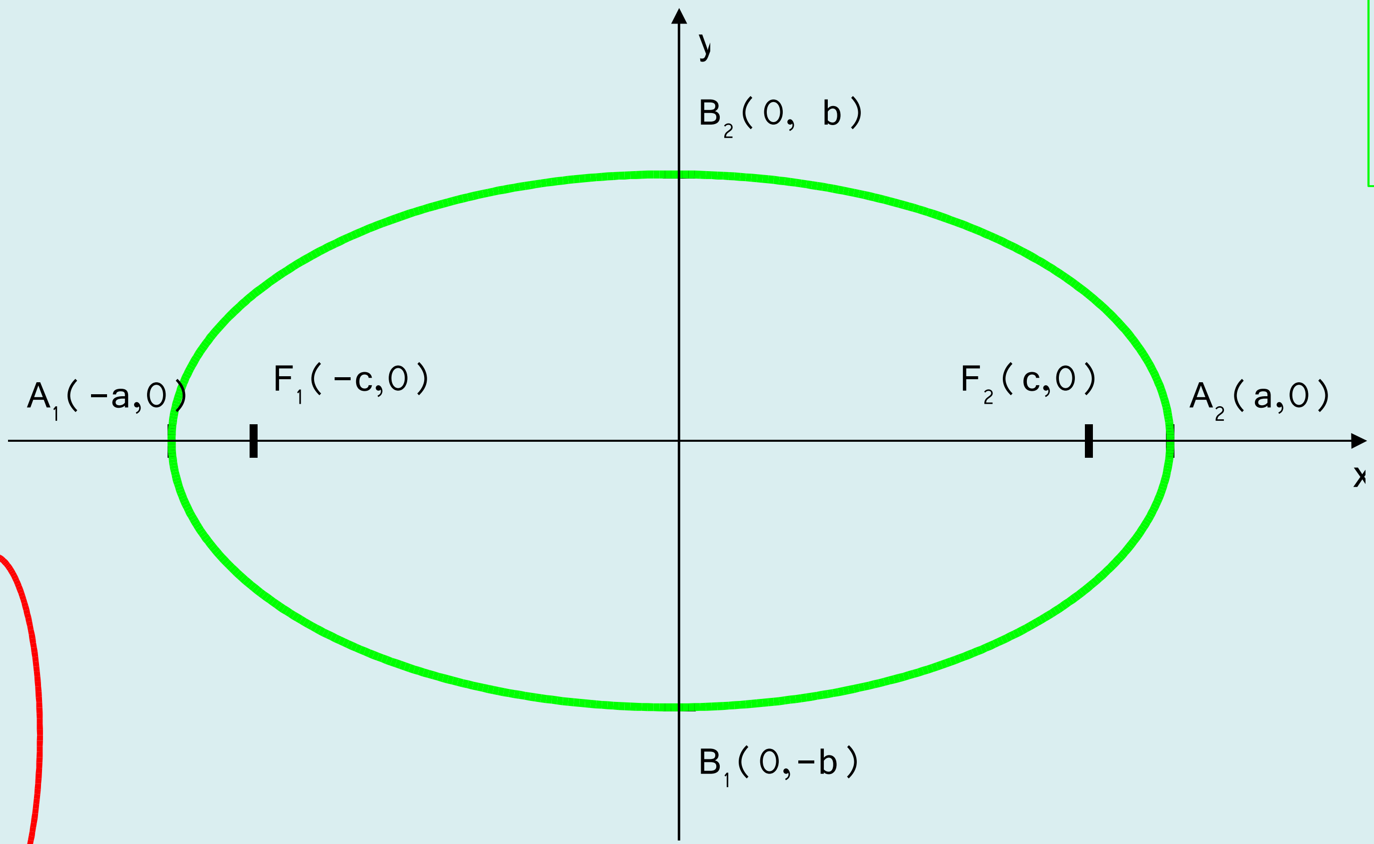
ELLISSE

Equazione canonica dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Se a > b > 0 l'ellisse ha l'asse x come asse focale, il semiasse maggiore misura a e il semiasse minore misura b

$$a > c$$
$$a^2 > c^2$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$



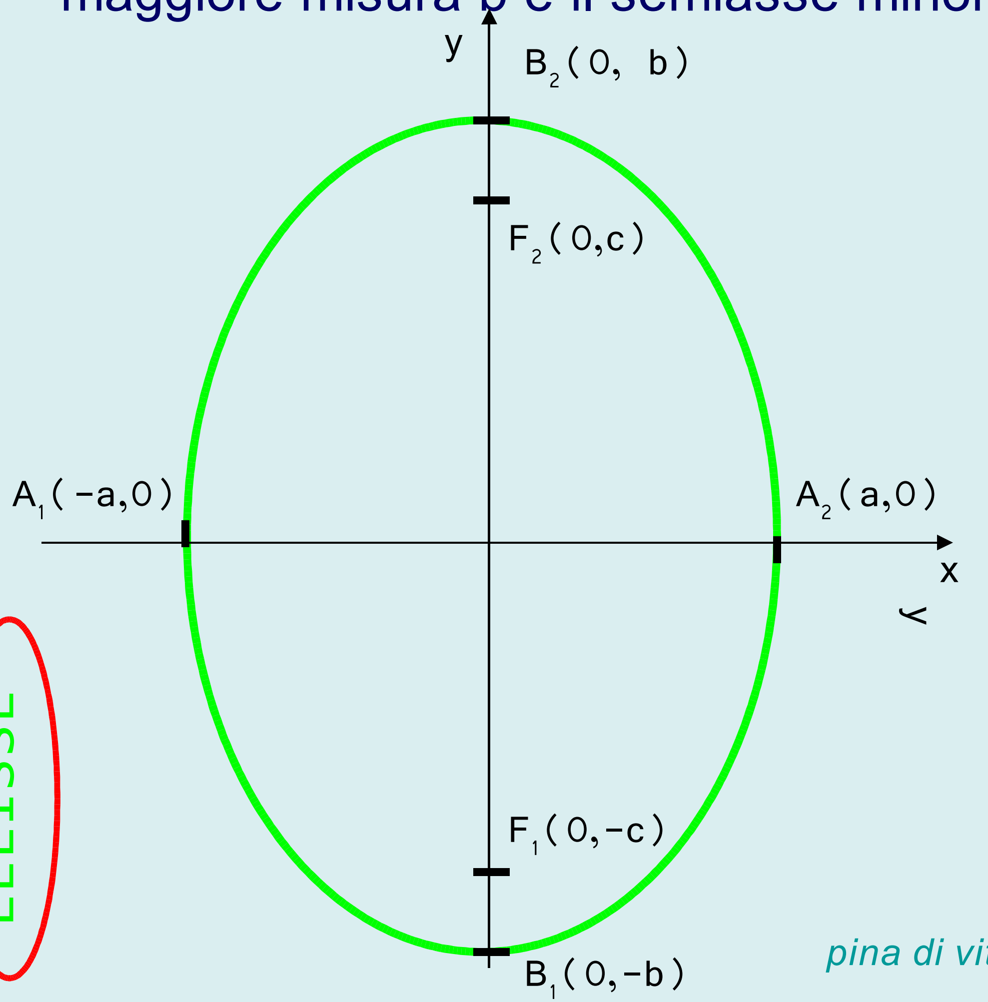
$$e=\frac{c}{a}$$
$$0 < e < 1$$

Equazione canonica dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se b > a > 0 l'ellisse ha l'asse y come asse focale, il semiasse maggiore misura b e il semiasse minore misura a

$$b > c$$
$$b^2 > c^2$$
$$a^2 = b^2 - c^2$$

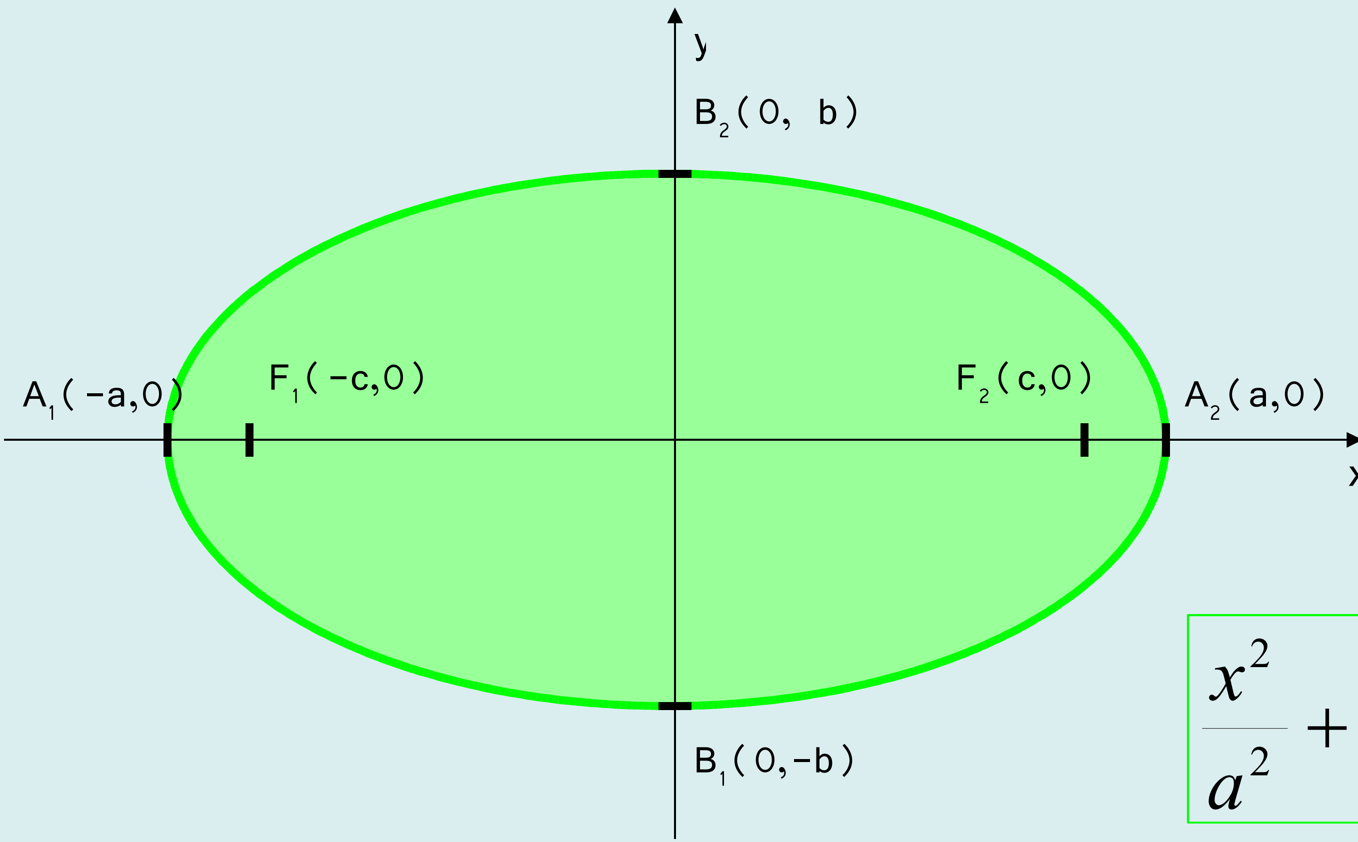


$$e = \frac{c}{b}$$
$$0 < e < 1$$

ELLISSE

Area della parte di piano delimitata dall’ellisse

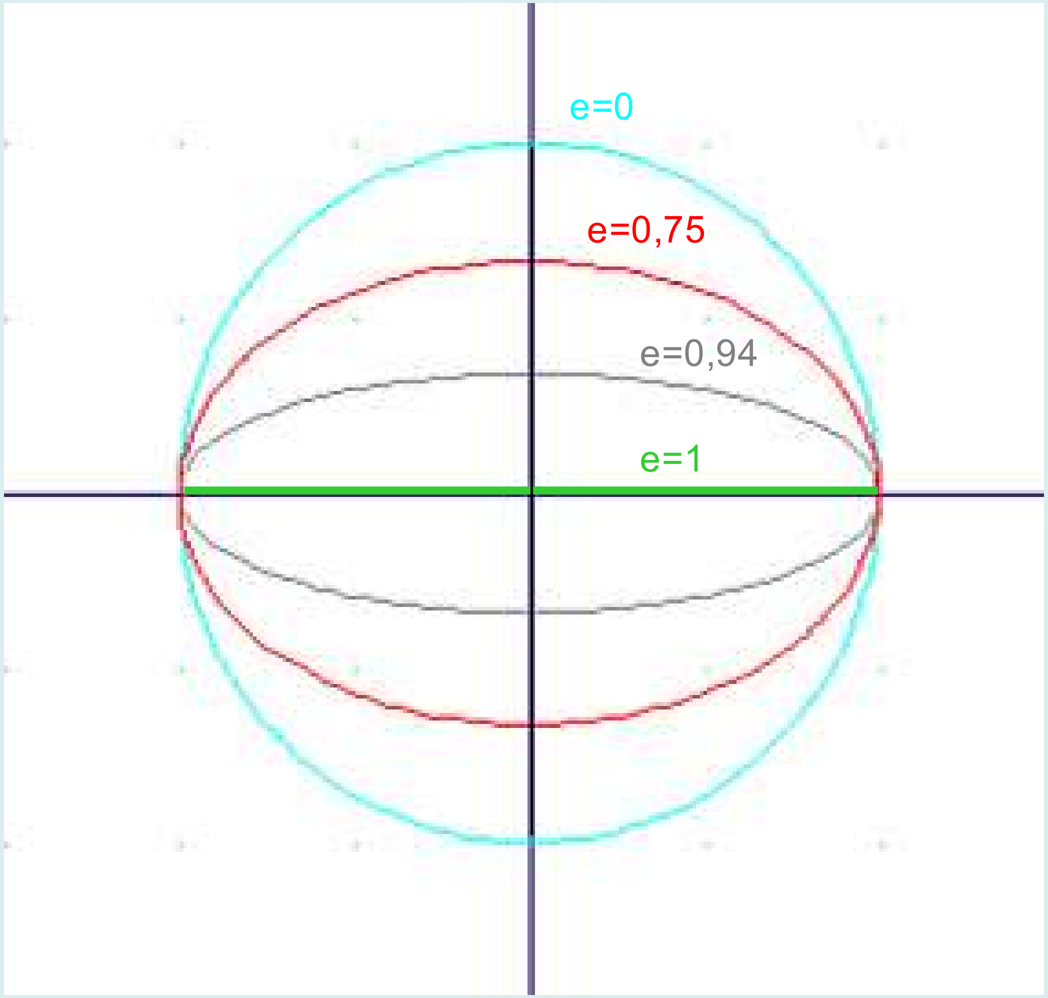
$$A = \pi ab$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ELLISSE

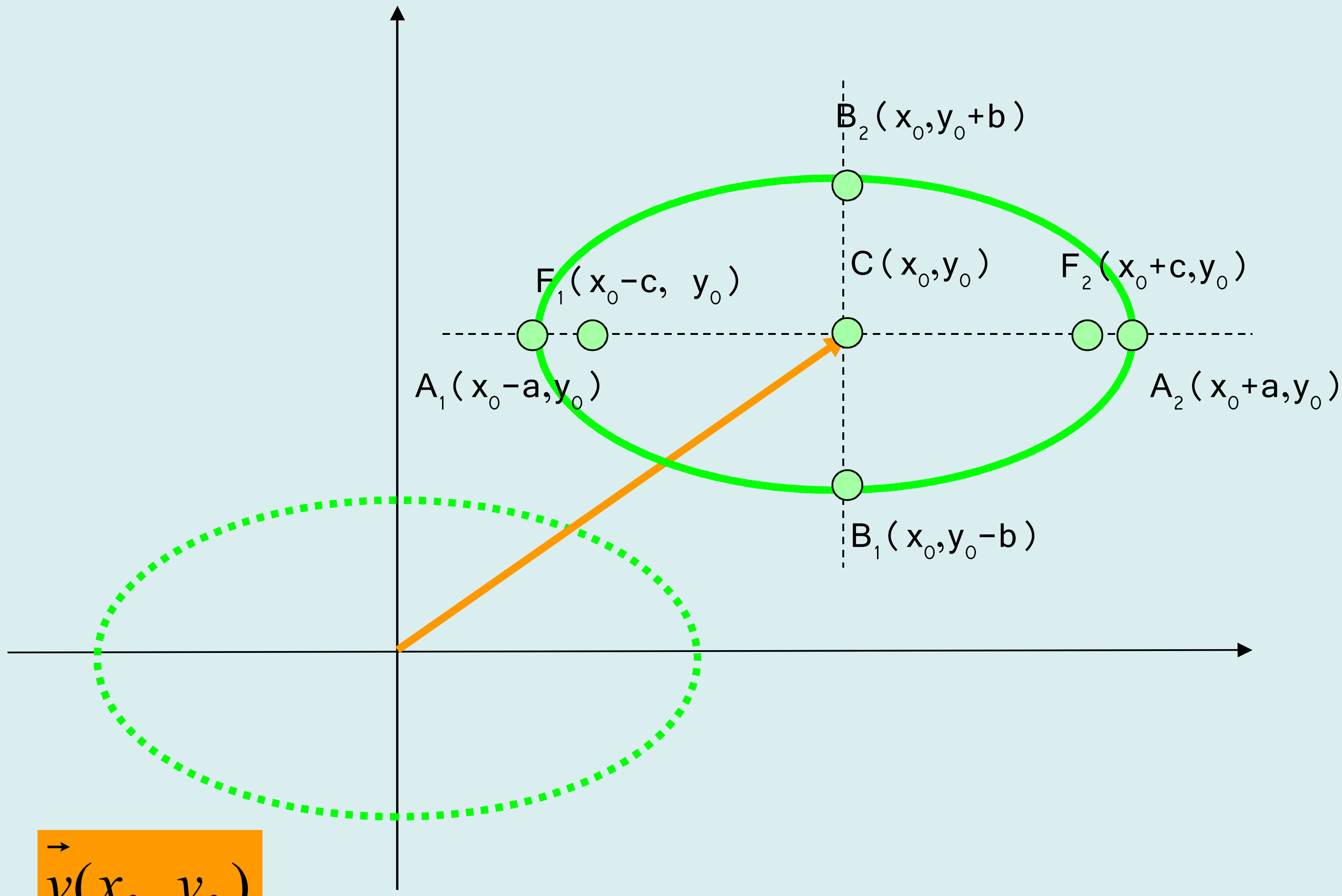
Eccentricità e schiacciamento dell'ellisse



ELLISSE

Ellisse traslata

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



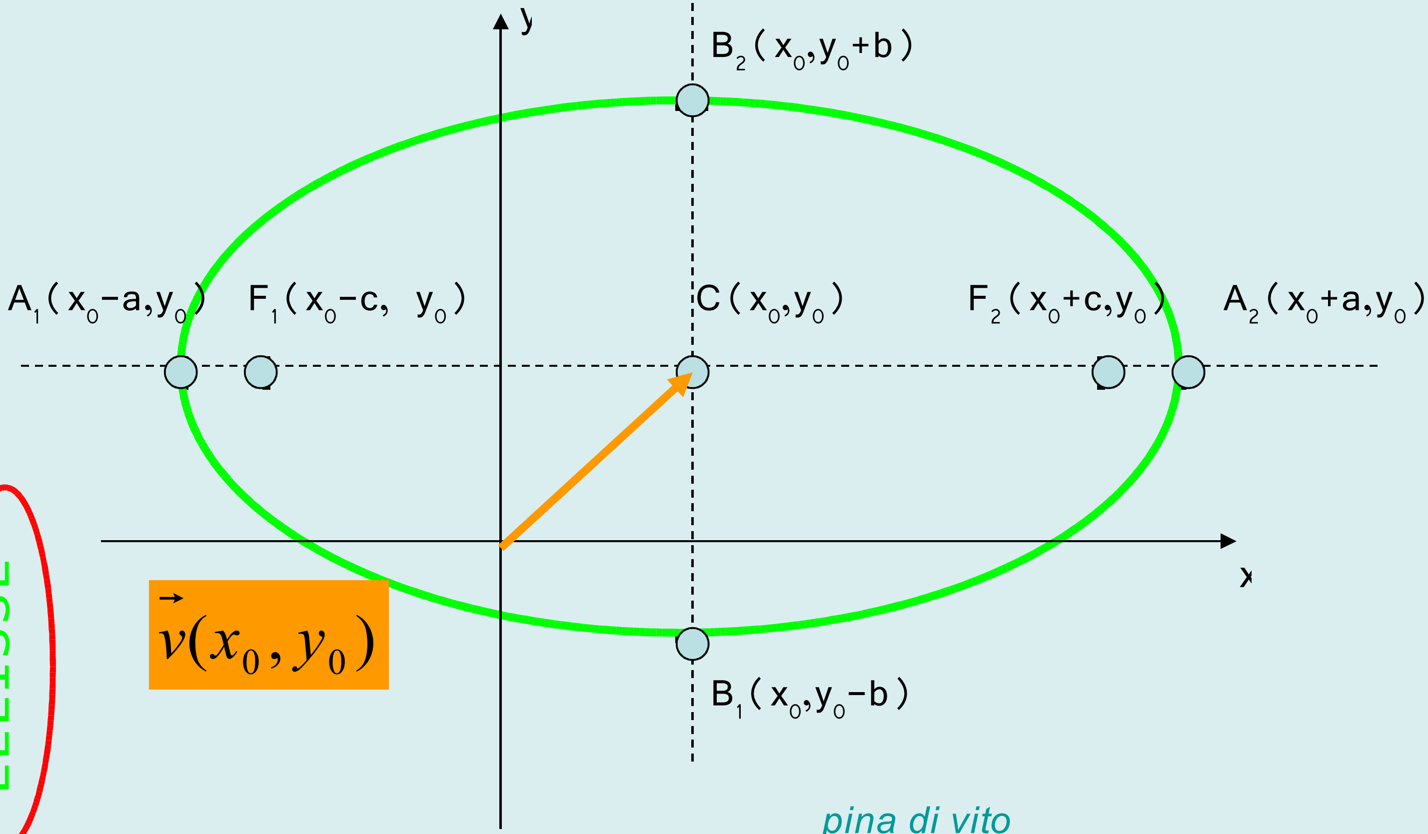
$$\vec{v}(x_0, y_0)$$

ELLISSE

Ellisse traslata

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

Se a > b > 0 l’asse focale è parallelo all’asse x, il semiasse maggiore misura a e il semiasse minore misura b, gli assi di simmetria passano per il centro dell’ellisse ed hanno equazione $x=x_0$ e $y=y_0$

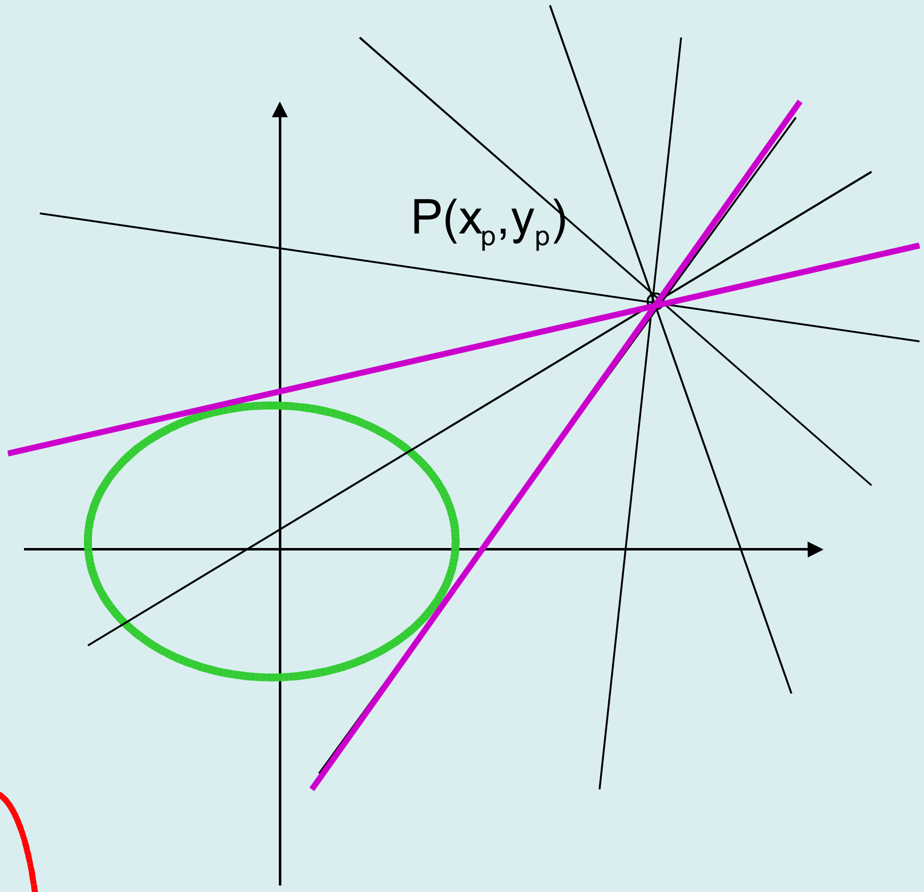


ELLISSE

$$a > c$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$
$$0 < e < 1$$

Tangenti all’ellisse da un punto esterno

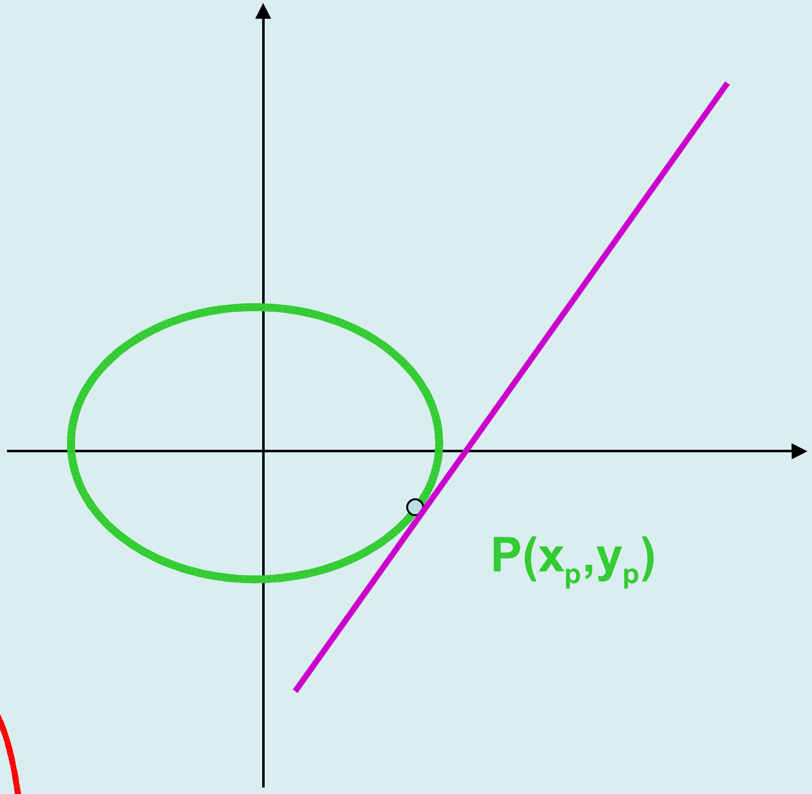


$$\begin{cases} y-y_p=m(x-x_p) \\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \end{cases}$$

Metodo del Δ=0

ELLISSE

Tangente all'ellisse in un suo punto



$$\boxed{\frac{xx_p}{a^2}+\frac{yy_p}{b^2}=1}$$

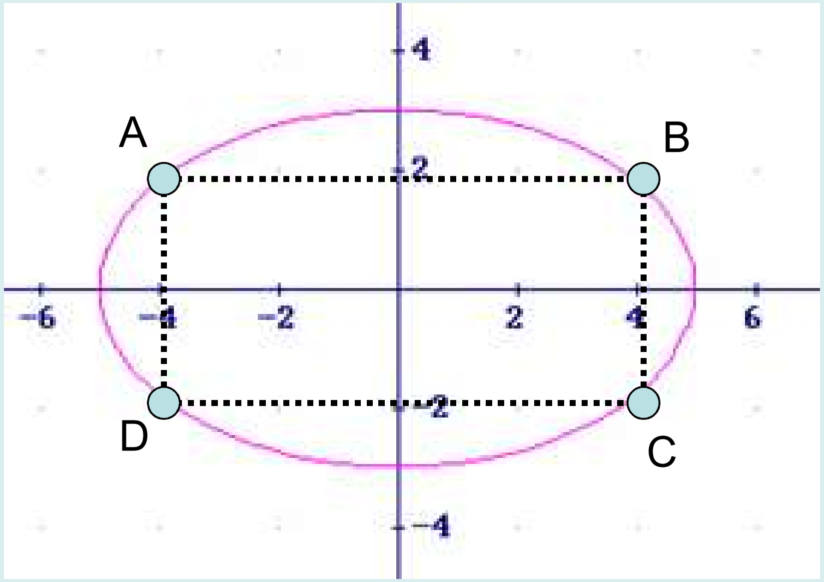
Formula di sdoppiamento

ELLISSE

Esempio 1

Determinare l'equazione del luogo dei punti del piano per cui è 10 la somma delle distanze dai punti (-4,0) e (4,0). Determina l'area della parte di piano delimitata dall'ellisse e dal rettangolo in essa inscritto, passante per i fuochi.

$$a = 5 \quad c = 4 \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \qquad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Suggerimento: determinare le ordinate dei punti di ascissa 4

$$\frac{4^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \qquad \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{16}{25} \qquad y = \pm\frac{9}{5}$$

$$\overline{AB} = |4 - (-4)| = 8 \qquad \overline{BC} = \left|\frac{9}{5} - \left(-\frac{9}{5}\right)\right| = \frac{18}{5}$$

$$A_{rett} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 8 \cdot \frac{18}{5} = \frac{144}{5}$$

$$A_{ellisse} = \pi ab = 15\pi \qquad A \cong 18{,}3$$

ELLISSE

Esempio 2

Scrivere l'equazione dell'ellisse riferita al centro e ai suoi assi, passante per i punti A(1,-3) B(2,2). Trovare le tangenti all'ellisse in A e B e determinare l'angolo che esse formano con l'asse delle x.

$$\begin{cases} \dfrac{1^2}{a^2}+\dfrac{(-3)^2}{b^2}=1 \\ \dfrac{2^2}{a^2}+\dfrac{2^2}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{9}{b^2}=1 \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{a^2}+9\cdot\dfrac{1}{b^2}=1 \\ 4\cdot\dfrac{1}{a^2}+4\cdot\dfrac{1}{b^2}=1 \end{cases}$$

$$\boxed{\text{pongo} \quad t=\frac{1}{a^2} \quad \text{e} \quad z=\frac{1}{b^2}}$$

$$\begin{cases} t+9z=1 \\ 4t+4z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} t=\dfrac{5}{32} \\ z=\dfrac{3}{32} \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2=\dfrac{32}{5} \\ b^2=\dfrac{32}{3} \end{cases}$$

$$\boxed{5x^2+3y^2=32}$$

tangente in A(1,-3) $\quad 5x\cdot(1)+3y\cdot(-3)=32 \qquad 5x-9y-32=0$

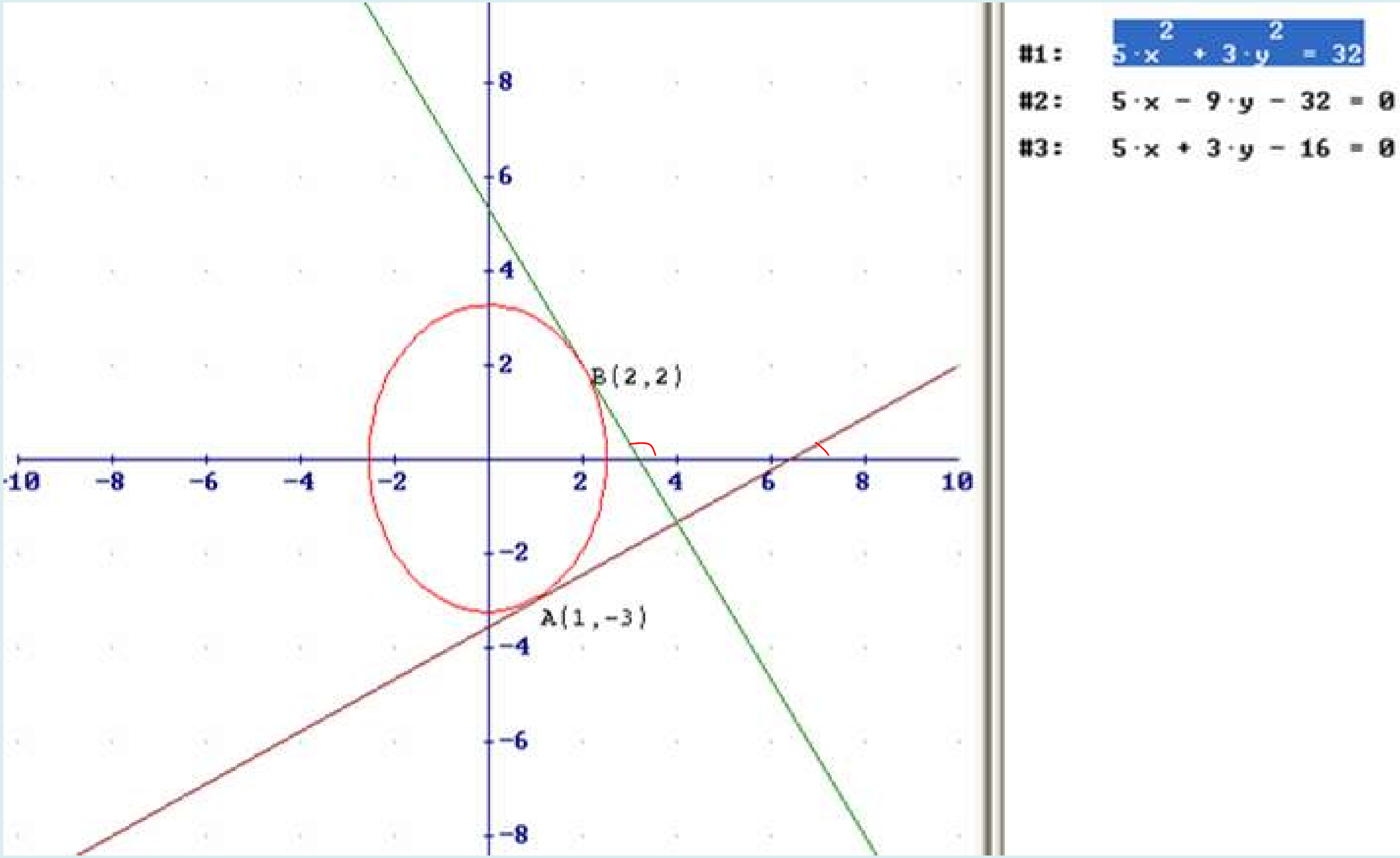
$$m=-\frac{a}{b}=\frac{5}{9} \qquad \boxed{\alpha=\operatorname{arctg}\left(\tfrac{5}{9}\right)=29^\circ}$$

tangente in B(2,2) $\quad 5x\cdot(2)+3y(2)=32 \qquad 5x+3y-16=0$

$$m'=-\frac{a}{b}=-\frac{5}{3} \qquad \boxed{\beta=\operatorname{arctg}\left(-\tfrac{5}{3}\right)=-59^\circ=121^\circ}$$

ELLISSE

Grafico problema 2



ELLISSE

Esempio 3

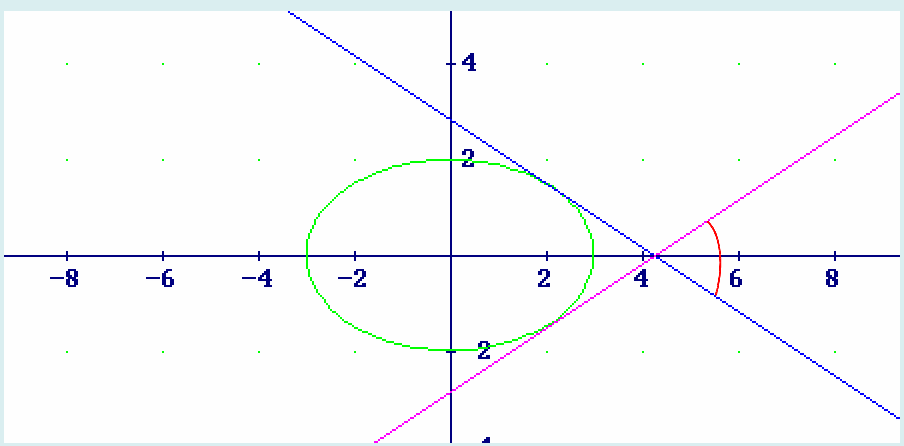
Dal punto $P(3\sqrt{2},0)$ condurre le tangenti all'ellisse di equazione $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ e determinare l'ampiezza dell'angolo acuto che esse delimitano

Scrivo l'equazione del fascio di sostegno P $\quad y=m(x-3\sqrt{2})$

Pongo a sistema con l'equazione dell'ellisse $\begin{cases} y=m(x-3\sqrt{2}) \\ 4x^2+9y^2=36 \end{cases} \rightarrow (9\mathrm{m}^2+4)x^2-54\sqrt{2}m^2x+162m^2-36=0$

$$\Delta=0 \qquad \mathrm{m}=\pm\frac{2}{3}$$

Le due tangenti hanno equazione $\quad y=-\dfrac{2}{3}(x-2\sqrt{3}) \quad$ e $\quad y=\dfrac{2}{3}(x-2\sqrt{3})$



$$\mathrm{m}=\frac{2}{3} \qquad \mathrm{m}'=-\frac{2}{3}$$

$$tg\alpha=\frac{m-m'}{1+mm'}=\frac{4}{5}$$

$$\boxed{\alpha=\mathrm{arctg}\left(\tfrac{4}{5}\right)\cong 38{,}7^\circ}$$

ELLISSE