

Geometria analitica

Retta

Circonferenza

Parabola

Ellisse

Iperbole

ELLISSE

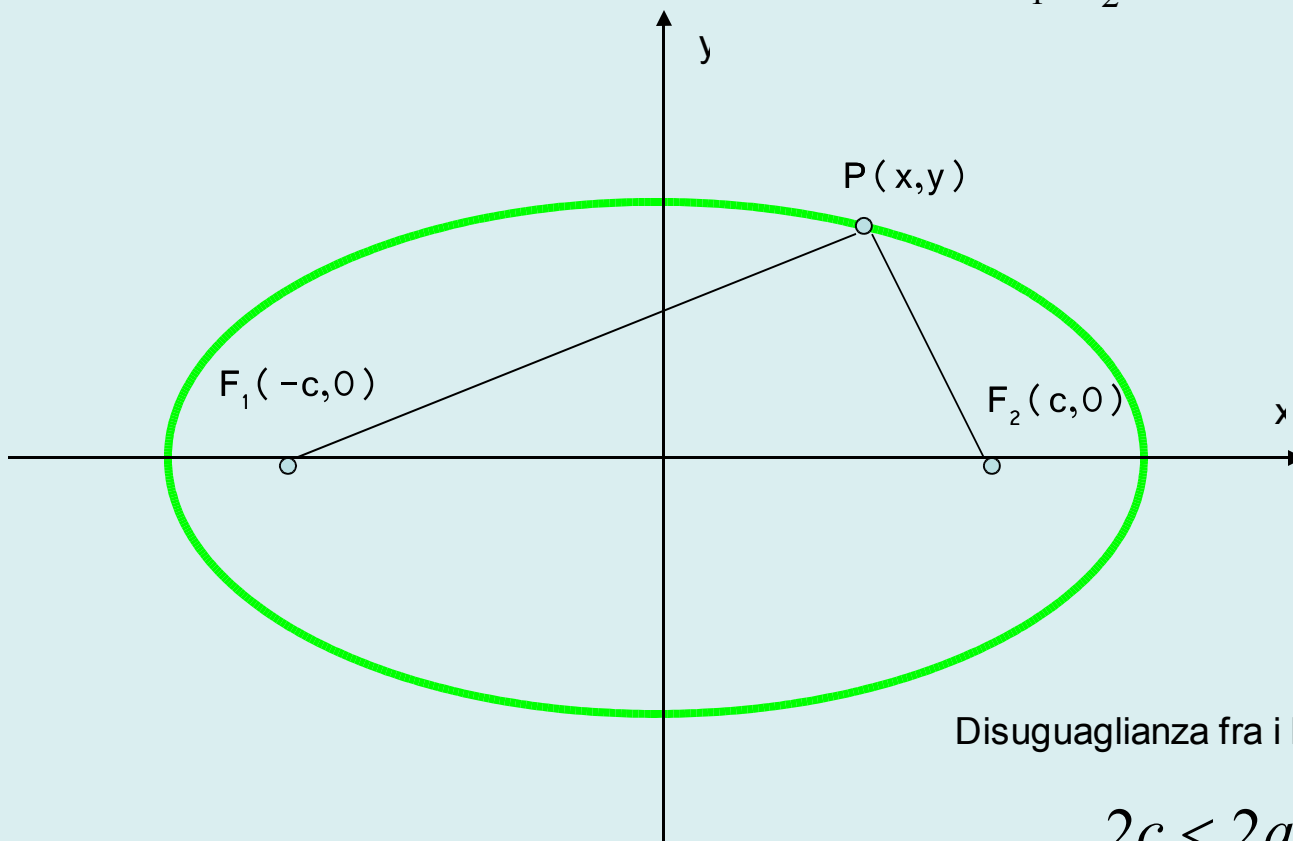
Ellisse come luogo geometrico

L'ellisse è una curva piana chiusa, luogo geometrico dei punti per i quali la somma delle distanze da due punti fissi del piano, detti fuochi, è costante

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\overline{F_1F_2} = 2c$$

$$\overline{F_1F_2} < \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$$



Disuguaglianza fra i lati del triangolo

$$2c < 2a$$

pina di vito

ELLISSE

Ricavo l'equazione canonica

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$(\sqrt{(x+c)^2 + y^2})^2 = (-\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 2a)^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = (a^2 - c^2)a^2$$

Pongo $b^2 = a^2 - c^2$ e divido per a^2b^2

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

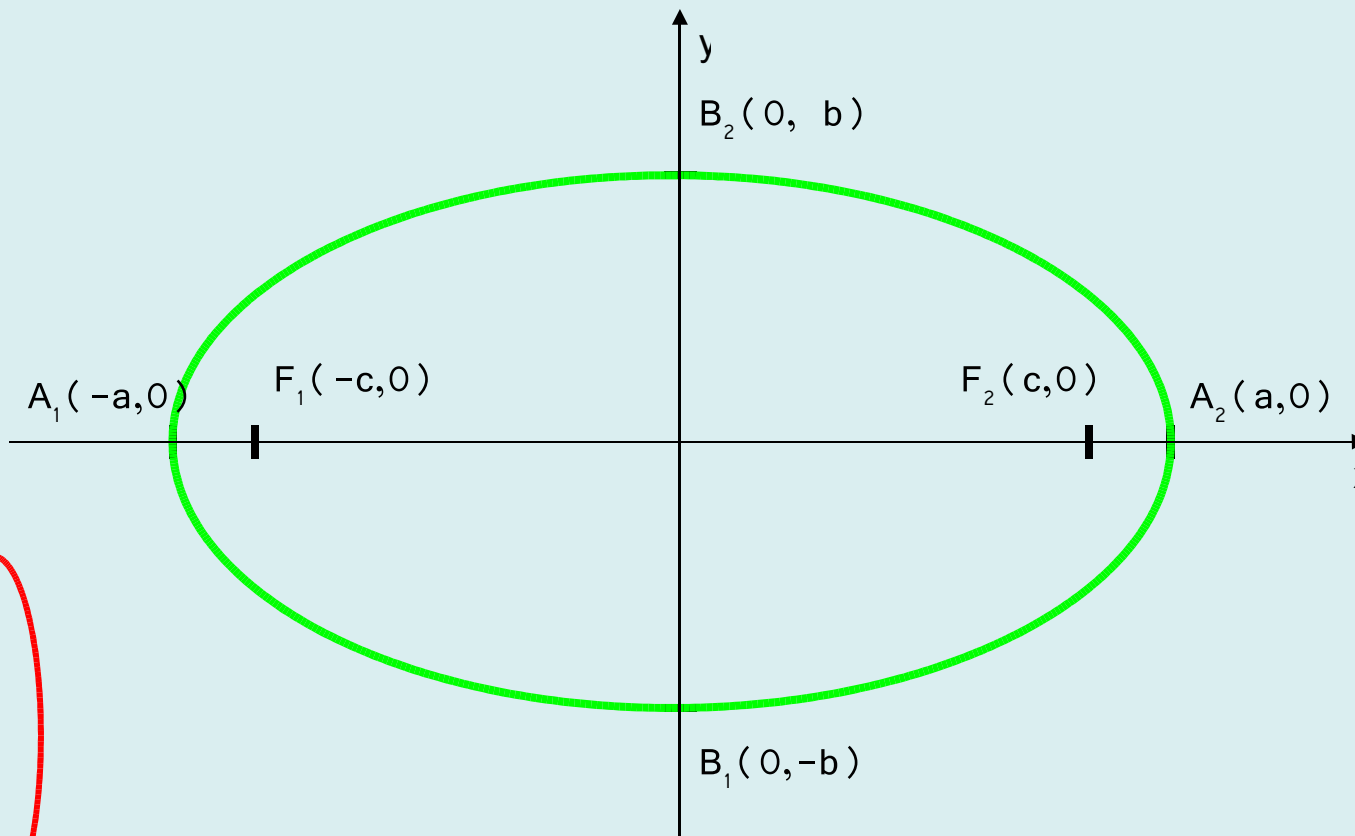
ELLISSE

Equazione canonica dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se $a > b > 0$ l'ellisse ha l'asse x come asse focale, il semiasse maggiore misura a e il semiasse minore misura b

$$\begin{aligned} a &> c \\ a^2 &> c^2 \\ b^2 &= a^2 - c^2 \end{aligned}$$



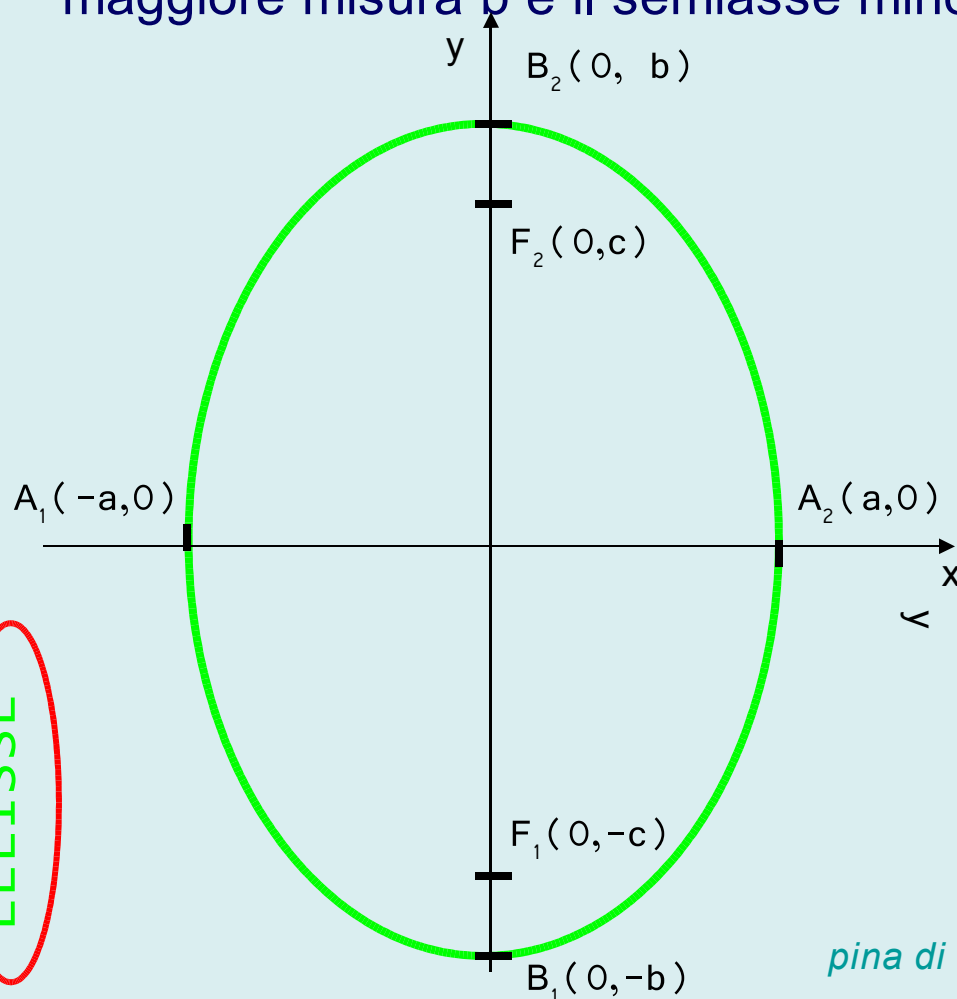
$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ 0 &< e < 1 \end{aligned}$$

ELLISSE

Equazione canonica dell'ellisse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Se $b > a > 0$ l'ellisse ha l'asse y come asse focale, il semiasse maggiore misura b e il semiasse minore misura a

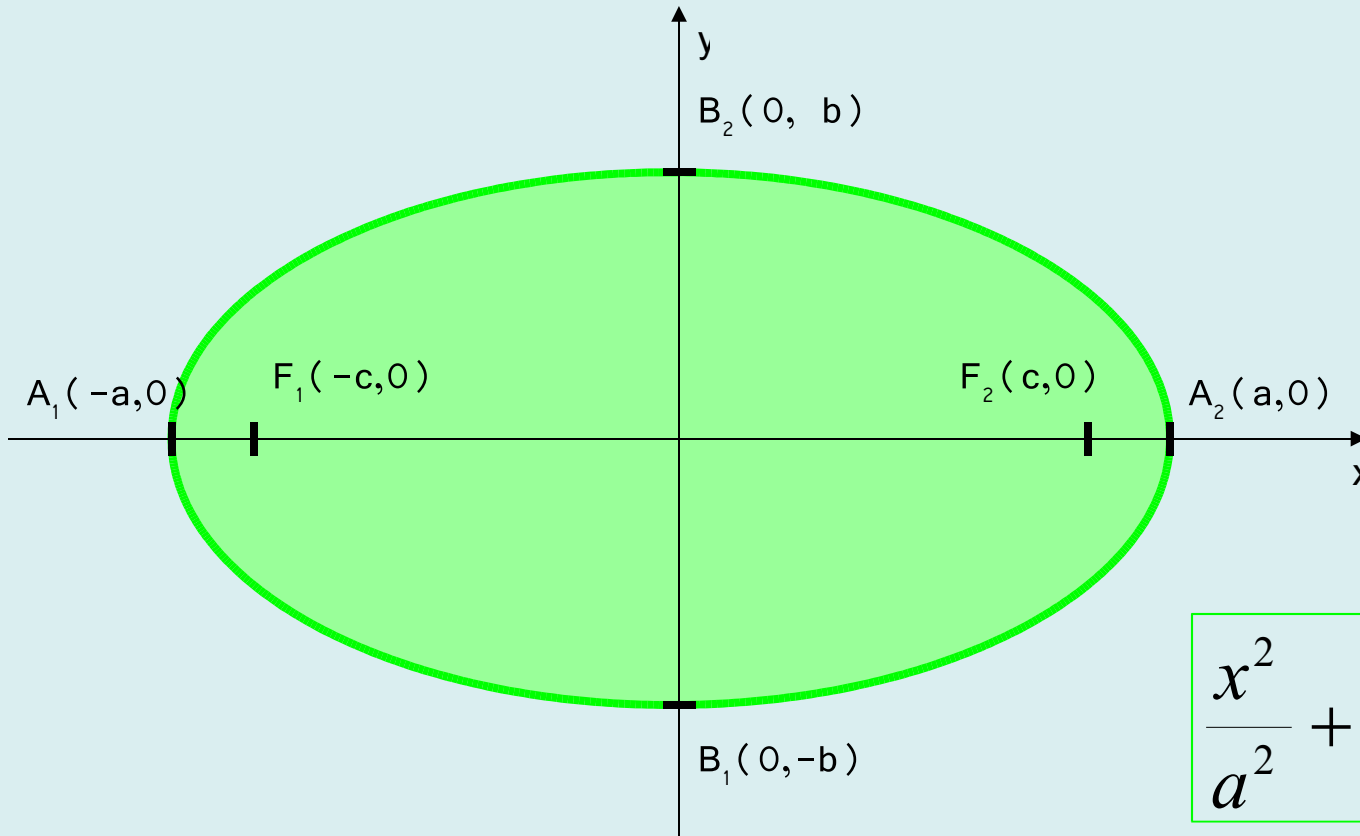


$$b > c$$
$$b^2 > c^2$$
$$a^2 = b^2 - c^2$$

$$e = \frac{c}{b}$$
$$0 < e < 1$$

Area della parte di piano delimitata dall'ellisse

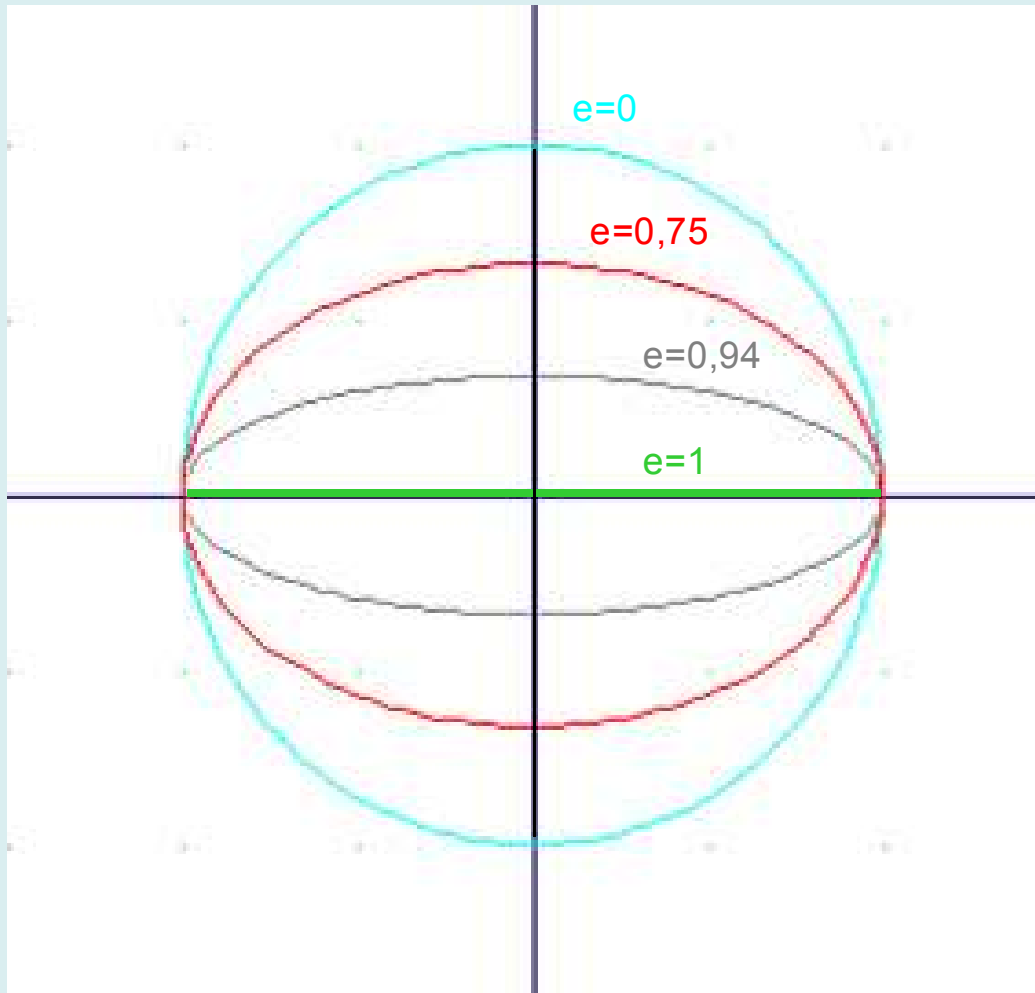
$$A = \pi ab$$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ELLISSE

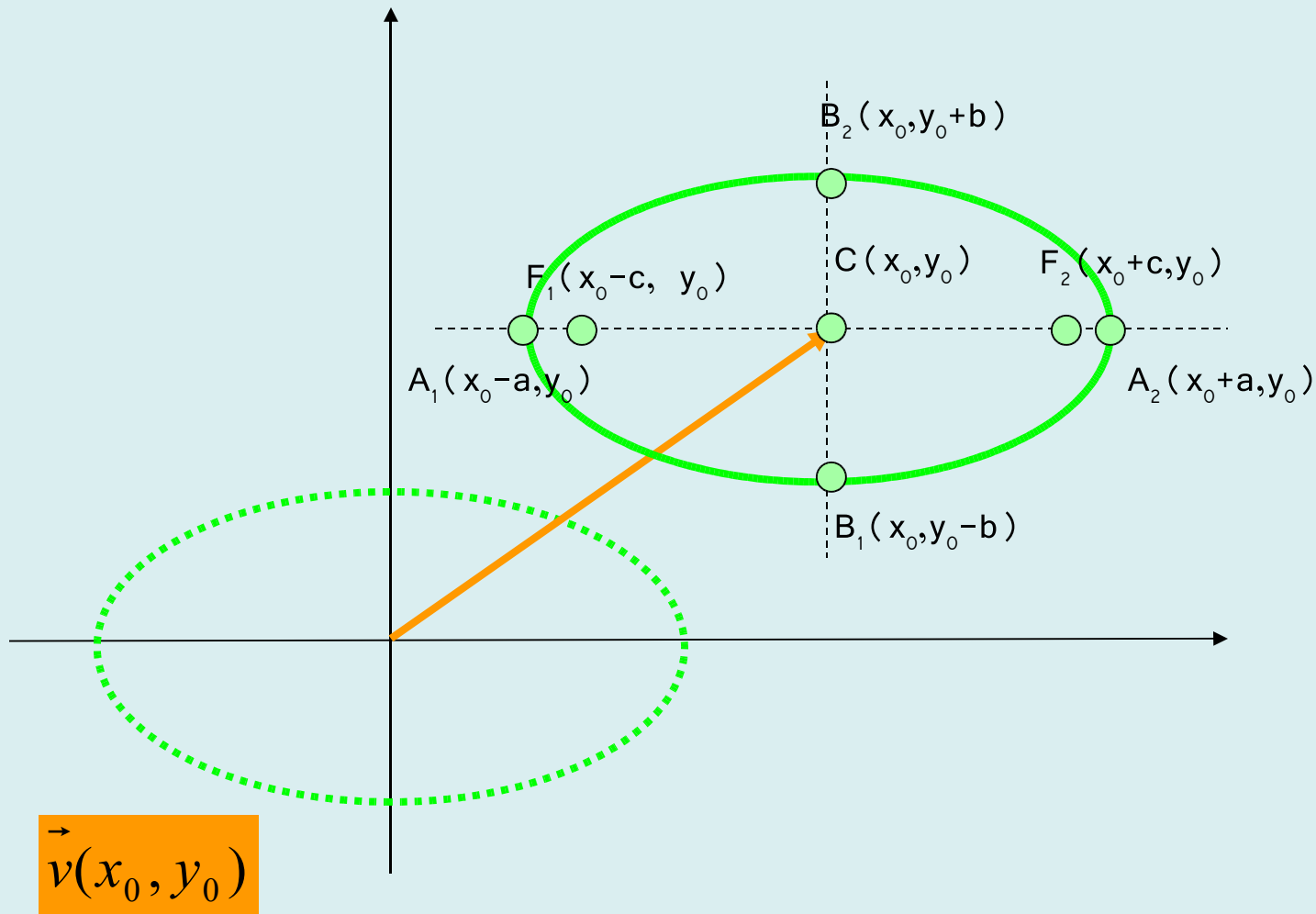
Eccentricità e schiacciamento dell'ellisse



ELLISSE

Ellisse traslata

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

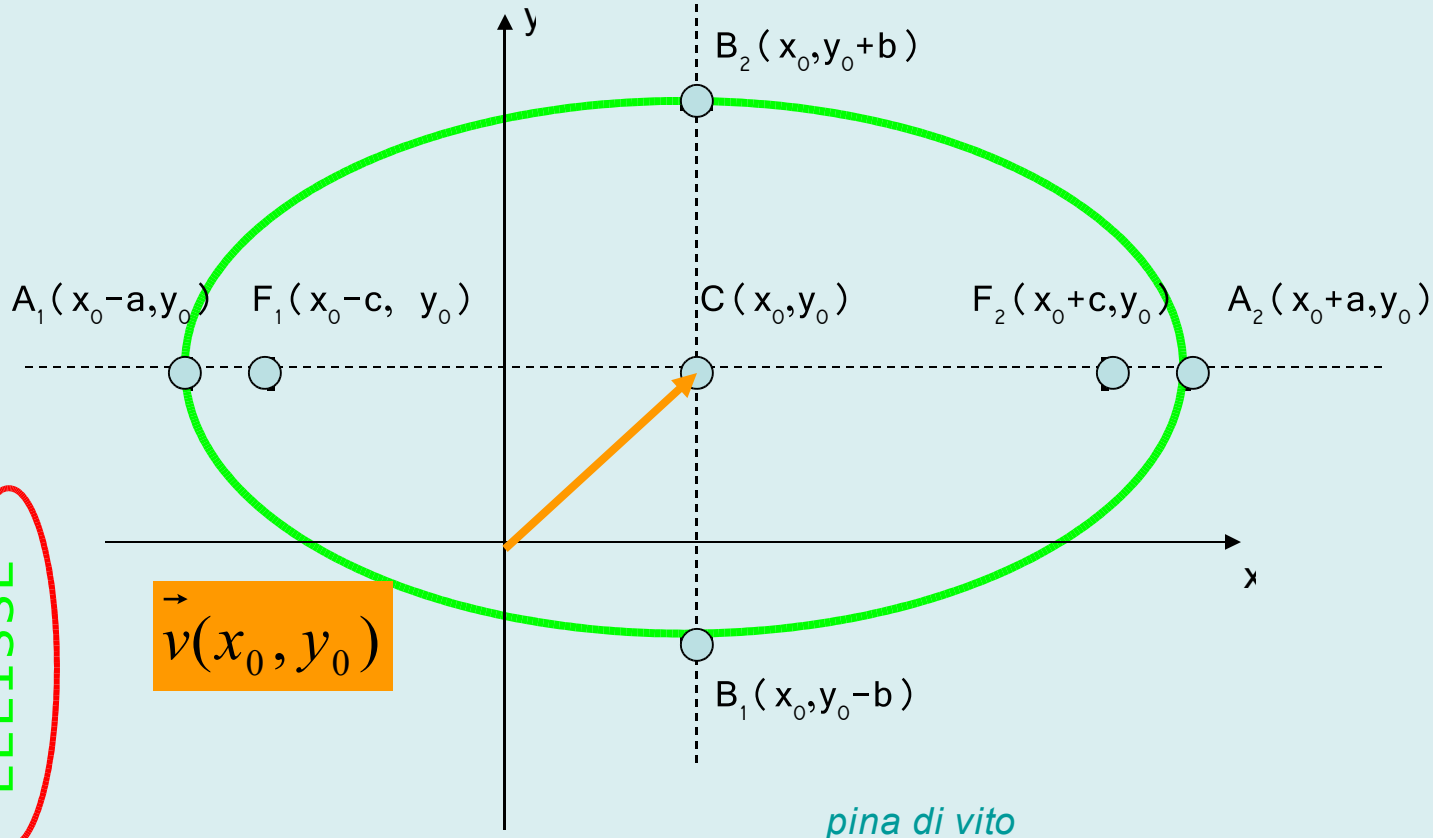


ELLISSE

Ellisse traslata

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Se $a > b > 0$ l'asse focale è parallelo all'asse x , il semiasse maggiore misura a e il semiasse minore misura b , gli assi di simmetria passano per il centro dell'ellisse ed hanno equazione $x=x_0$ e $y=y_0$

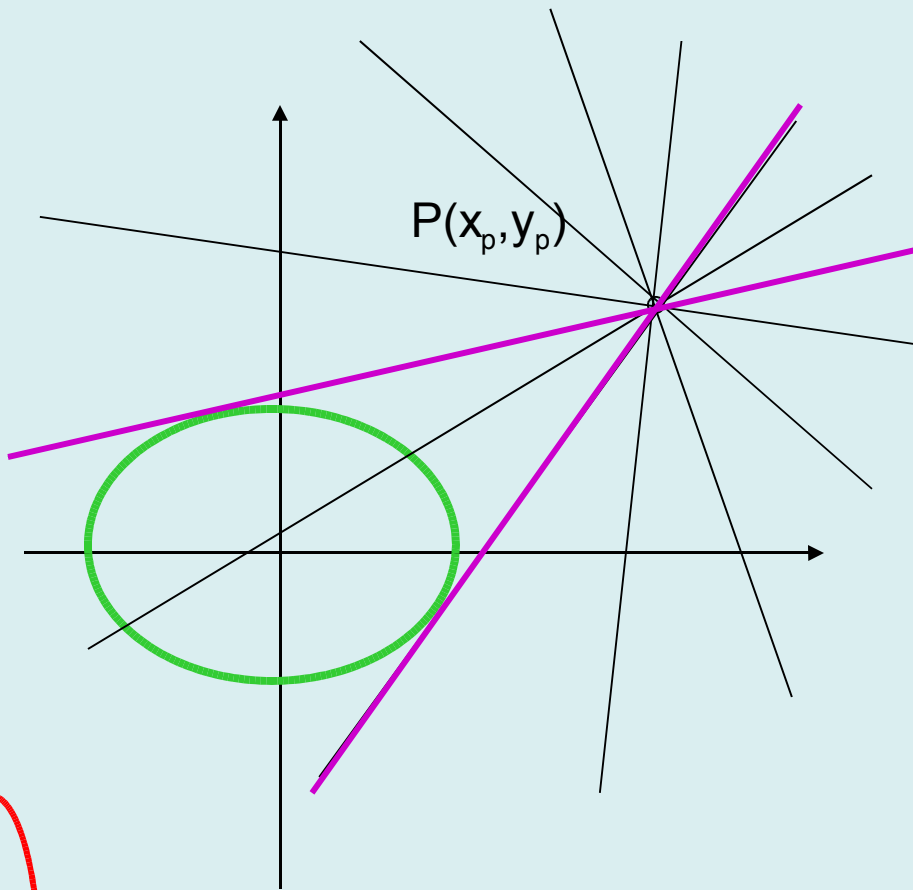


$$a > c$$
$$b^2 = a^2 - c^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$
$$0 < e < 1$$

ELLISSE

Tangenti all'ellisse da un punto esterno

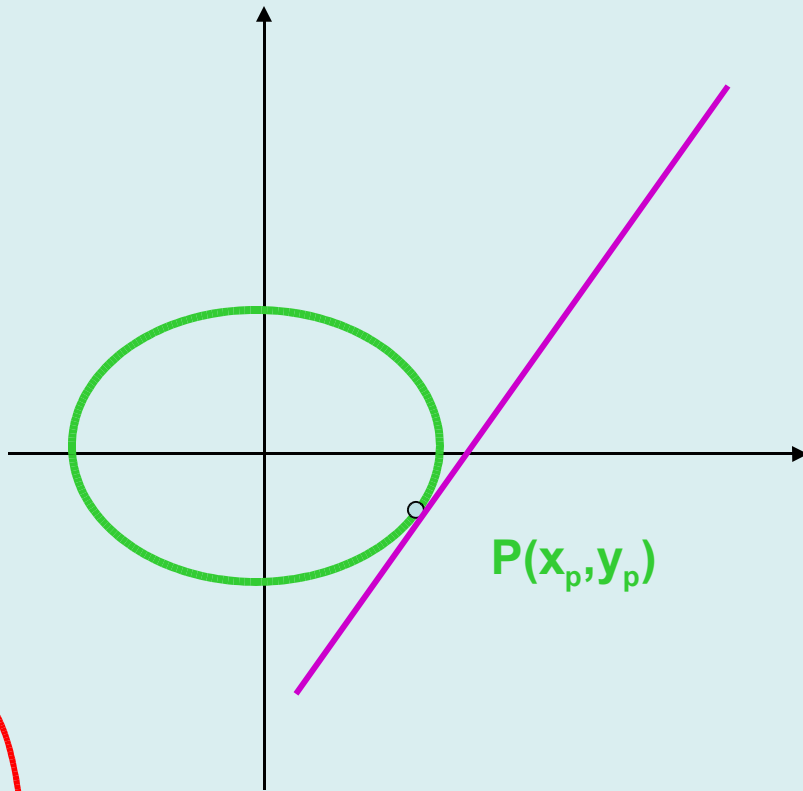


$$\begin{cases} y - y_p = m(x - x_p) \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}$$

Metodo del $\Delta=0$

ELLISSE

Tangente all'ellisse in un suo punto



$$\frac{xx_p}{a^2} + \frac{yy_p}{b^2} = 1$$

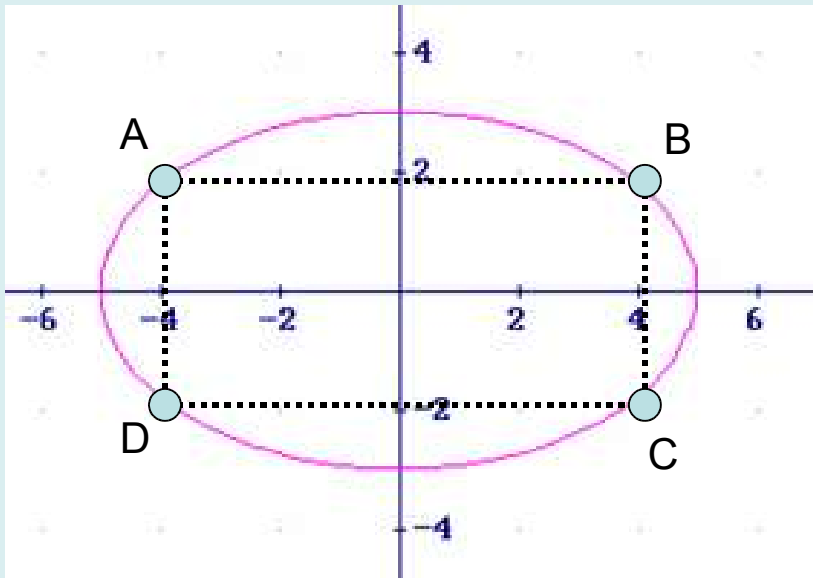
Formula di sdoppiamento

ELLISSE

Esempio 1

Determinare l'equazione del luogo dei punti del piano per cui è 10 la somma delle distanze dai punti $(-4,0)$ e $(4,0)$. Determina l'area della parte di piano delimitata dall'ellisse e dal rettangolo in essa inscritto, passante per i fuochi.

$$a = 5 \quad c = 4 \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{25 - 16} = 3 \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



Suggerimento: determinare le ordinate dei punti di ascissa 4

$$\frac{4^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \frac{y^2}{9} = 1 - \frac{16}{25} \quad y = \pm \frac{9}{5}$$

$$\overline{AB} = |4 - (-4)| = 8 \quad \overline{BC} = \left| \frac{9}{5} - \left(-\frac{9}{5}\right) \right| = \frac{18}{5}$$

$$A_{rett} = \overline{AB} \cdot \overline{BC} = 8 \cdot \frac{18}{5} = \frac{144}{5}$$

$$A_{ellisse} = \pi ab = 15\pi \quad A \cong 18,3$$

Esempio 2

Scrivere l'equazione dell'ellisse riferita al centro e ai suoi assi, passante per i punti A(1,-3) B(2,2). Trovare le tangenti all'ellisse in A e B e determinare l'angolo che esse formano con l'asse delle x.

$$\begin{cases} \frac{1^2}{a^2} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1 \\ \frac{2^2}{a^2} + \frac{2^2}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ \frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{a^2} + 9 \cdot \frac{1}{b^2} = 1 \\ 4 \cdot \frac{1}{a^2} + 4 \cdot \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\text{pongo } t = \frac{1}{a^2} \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{b^2}$$

$$\begin{cases} t + 9z = 1 \\ 4t + 4z = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} t = \frac{5}{32} \\ z = \frac{3}{32} \end{cases} \quad \begin{cases} a^2 = \frac{32}{5} \\ b^2 = \frac{32}{3} \end{cases}$$

$$5x^2 + 3y^2 = 32$$

tangente in A(1,-3)

$$5x \cdot (1) + 3y \cdot (-3) = 32$$

$$5x - 9y - 32 = 0$$

$$m = -\frac{a}{b} = \frac{5}{9}$$

$$\alpha = \arctg\left(\frac{5}{9}\right) = 29^\circ$$

tangente in B(2,2)

$$5x \cdot (2) + 3y(2) = 32$$

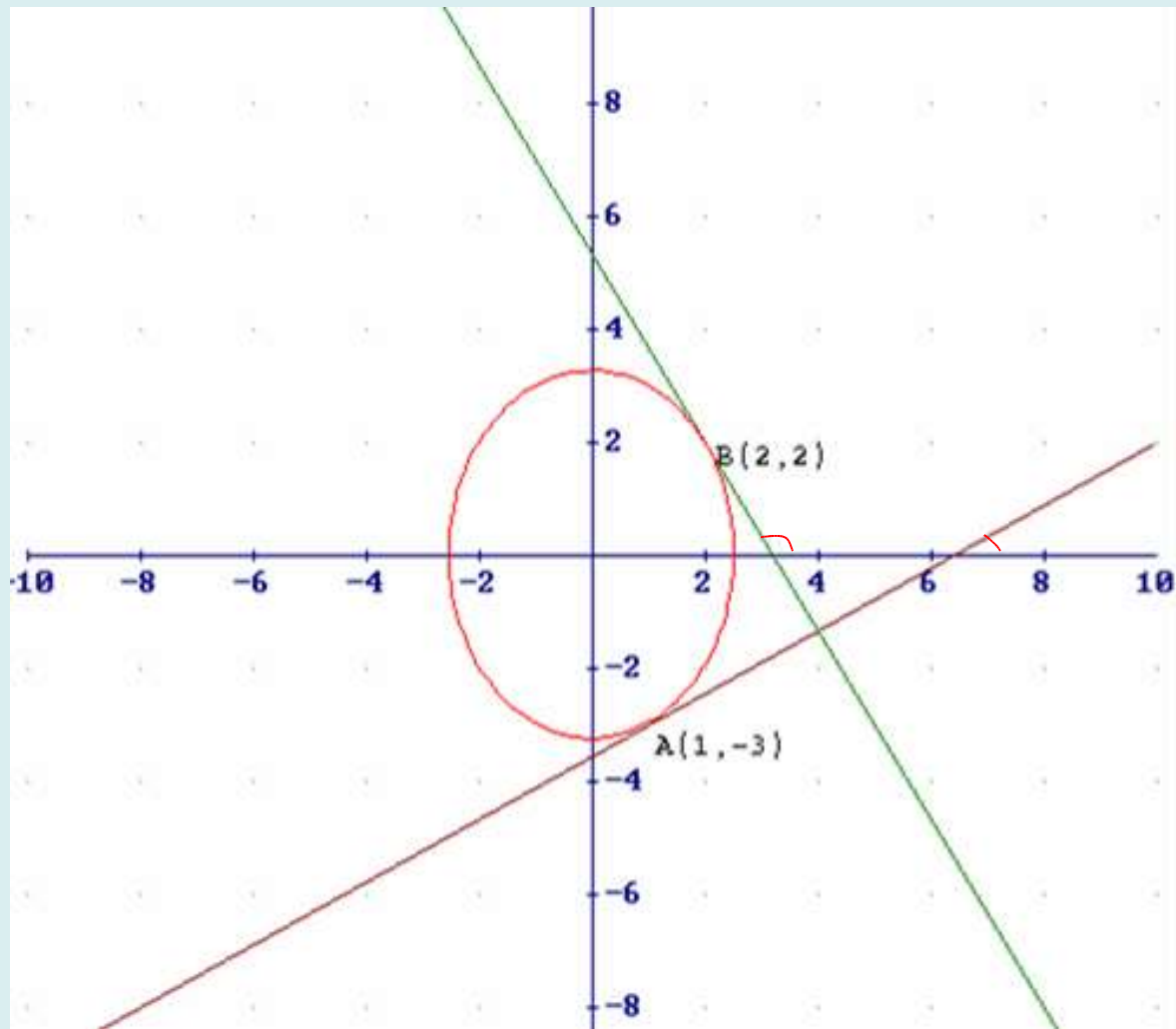
$$5x + 3y - 16 = 0$$

$$m' = -\frac{a}{b} = -\frac{5}{3}$$

$$\beta = \arctg\left(-\frac{5}{3}\right) = -59^\circ = 121^\circ$$

ELLISSE

Grafico problema 2



#1: $5x^2 + 3y^2 = 32$
#2: $5x - 9y - 32 = 0$
#3: $5x + 3y - 16 = 0$

ELLISSE

Esempio 3

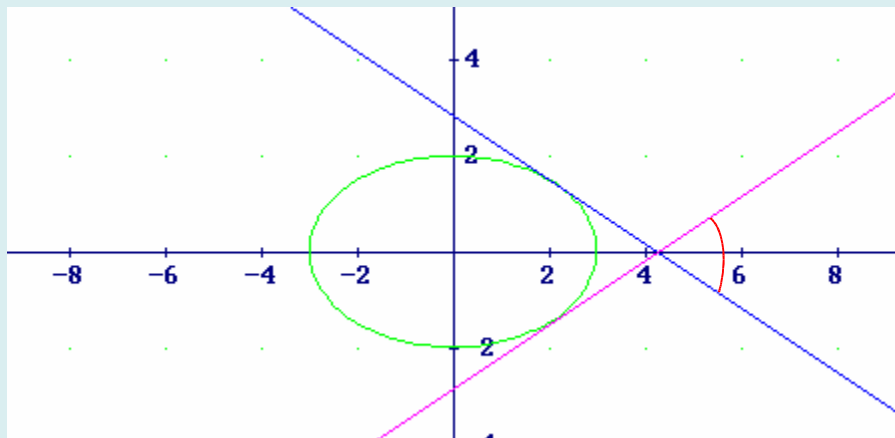
Dal punto $P(3\sqrt{2}, 0)$ condurre le tangenti all'ellisse di equazione $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e determinare l'ampiezza dell'angolo acuto che esse delimitano

Scrivo l'equazione del fascio di sostegno P $y = m(x - 3\sqrt{2})$

Pongo a sistema con l'equazione dell'ellisse $\begin{cases} y = m(x - 3\sqrt{2}) \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases} \rightarrow (9m^2 + 4)x^2 - 54\sqrt{2}m^2x + 162m^2 - 36 = 0$

$$\Delta = 0 \quad m = \pm \frac{2}{3}$$

Le due tangenti hanno equazione $y = -\frac{2}{3}(x - 2\sqrt{3})$ e $y = \frac{2}{3}(x - 2\sqrt{3})$



$$m = \frac{2}{3} \quad m' = -\frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m - m'}{1 + mm'} = \frac{4}{5}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{4}{5}\right) \cong 38,7^\circ$$

pina di vito

ELLISSE