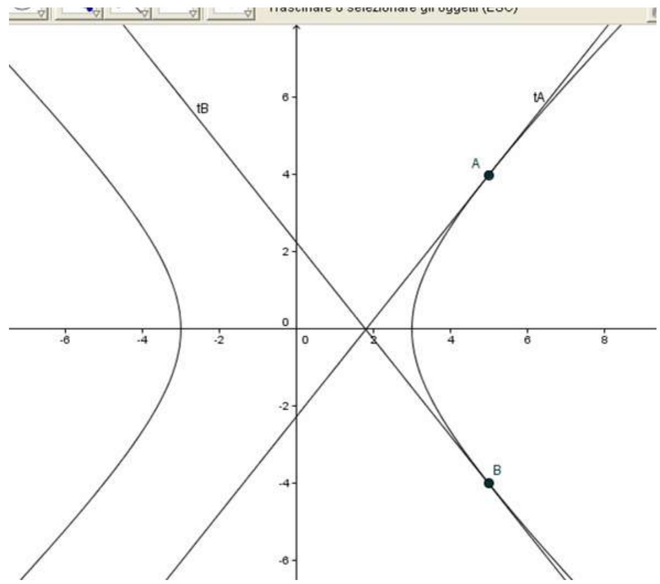
1) Data l'iperbole $x^2 - y^2 = 9$, indica le coordinate dei fuochi e determina le equazioni delle tangenti nei punti di intersezione con la retta $x - 5 = 0$. Quale relazione di simmetria lega le due tangenti?

$x^2 - y^2 = 9$ iperbole equilatera con asse focale sull'asse x.

$a = 3 \qquad c = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \qquad F_1(3\sqrt{2};0) \qquad F_2(-3\sqrt{2};0)$



$\begin{cases} x^2 - y^2 = 9 \\ x = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 25 - y^2 = 9 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 16 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} y = \pm 4 \\ -- \end{cases}$ A(5;4) B(5;-4)

uso il metodo di sdoppiamento visto che i punti appartengono all'iperbole

$t_A: \quad 5x + 4y = 9 \qquad t_B: \quad 5x - 4y = 9$

Le due tangenti sono una simmetrica dell'altra rispetto all'asse x

2) Studia il fascio di curve di equazione $y = \dfrac{(k+2)x + k - 1}{2kx + 1}$, con $k \in \mathbf{R}$.

Determina il luogo dei centri di simmetria del fascio, riconosci di che luogo si tratta e disegnalo.

per $k = 0$ si ha la retta $y = 2x - 1$

$ad - bc = 0 \qquad (k+2) - (k-1)2k + 0$

$k + 2 - 2k^2 + 2k = 0$

$2k^2 - 3k - 2 = 0$

$k_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \dfrac{3 \pm 5}{4} \qquad k_1 = -\dfrac{1}{2} \qquad k_2 = 2$

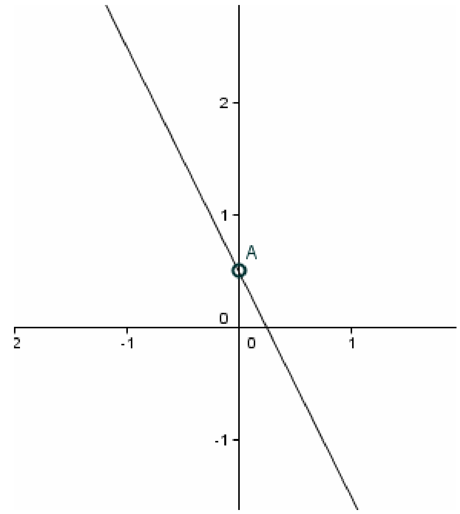
per $k = -\dfrac{1}{2}$ si ha la retta $y = \dfrac{(-\frac{1}{2} + 2)x - \frac{1}{2} - 1}{2(-\frac{1}{2})x + 1} = \dfrac{\frac{3}{2}x - \frac{3}{2}}{-x + 1} = -\dfrac{3}{2}\dfrac{x-1}{x-1} \qquad y = -\dfrac{3}{2}$ con $x \neq 1$

per $k = 2$ si ha la retta $y = \dfrac{4x + 2 - 1}{4x + 1} = \dfrac{4x + 1}{4x + 1} \qquad y = 1$ con $x \neq -\dfrac{1}{4}$

Per $k \neq 0; -\frac{1}{2}; 2$ si ha un fascio di funzioni omografiche. Il luogo dei centri di simmetria è:

C: $\begin{cases} x = -\frac{1}{2k} \\ y = \frac{k+2}{2k} \end{cases}$ ricavo l'equazione in forma cartesiana $\begin{cases} x = -\frac{1}{2k} \\ y = \frac{k+2}{2k} \end{cases}$ $\begin{cases} k = -\frac{1}{2x} \\ y = \frac{k+2}{2k} \end{cases}$ $x \neq 0$

$$y = \frac{-\frac{1}{2x}+2}{2(-\frac{1}{2x})} = \frac{\frac{-1+4x}{2x}}{-\frac{2}{2x}} = \frac{4x-1}{-2} = \frac{1}{2} - 2x \qquad y = \frac{1}{2} - 2x \quad \text{con } x \neq 0$$



3) a) Scrivi l'equazione dell'iperbole equilatera avente centro di simmetria in $C(-4;3)$ e passante per il punto $P(-6;9)$.

b) Verificato che risulta $y = \frac{3x}{x+4}$, determina il punto A simmetrico di O(0;0) rispetto a C e scrivi l'equazione della circonferenza avente per diametro il segmento OA.

c) Determina gli ulteriori punti D ed E di intersezione tra l'iperbole e la circonferenza.

d) Calcola l'area del quadrilatero ADOE.

a)

$$\begin{cases} -\frac{d}{c} = -4 \\ \frac{a}{c} = 3 \\ c = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} d = 4 \\ a = 3 \\ c = 1 \end{cases} \qquad y = \frac{3x+b}{x+4} \quad \text{uso l'appartenenza} \quad 9 = \frac{3(-6)+b}{-6+4} \qquad 9 = \frac{-18+b}{-2} \qquad -18 = -18+b \qquad b = 0$$

l'equazione è $y = \frac{3x}{x+4}$. La funzione omografica passa per l'origine O(0;0).

b) Il simmetrico di O rispetto a C e' $\begin{cases} x' = 2x_o - x \\ y' = 2y_o - y \end{cases}$ $\begin{cases} x' = 2 \cdot (-4) - 0 = -8 \\ y' = 2 \cdot 3 - 0 = 6 \end{cases}$ $A(-8;6)$

La circonferenza deve avere come centro il punto C(-4;3) e $r = \overline{OC} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

γ : $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$ $\quad x^2 + y^2 + 8x - 6y + 16 + 9 - 25 = 0$ $\quad x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0$

c)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 8x - 6y = 0 \\ y = \dfrac{3x}{x+4} \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + \dfrac{9x^2}{(x+4)^2} + 8x - 6\dfrac{3x}{x+4} = 0 \\ -- \end{cases}$$

$$x^2(x+4)^2 + 9x^2 + 8x(x+4)^2 - 18x(x+4) = 0$$
$$x(x+4)^2 + 9x + 8(x+4)^2 - 18(x+4) = 0$$
$$x^3 + 8x^2 + 16x + 9x + 8x^2 + 64x + 128 - 18x - 72 = 0$$
$$x^3 + 16x^2 + 71x + 56 = 0$$

L’origine degli assi O e il punto A sono punti comuni alle due curve quindi uso l’ascissa di A come radice per scomporre l’equazione di 3° grado con Ruffini.

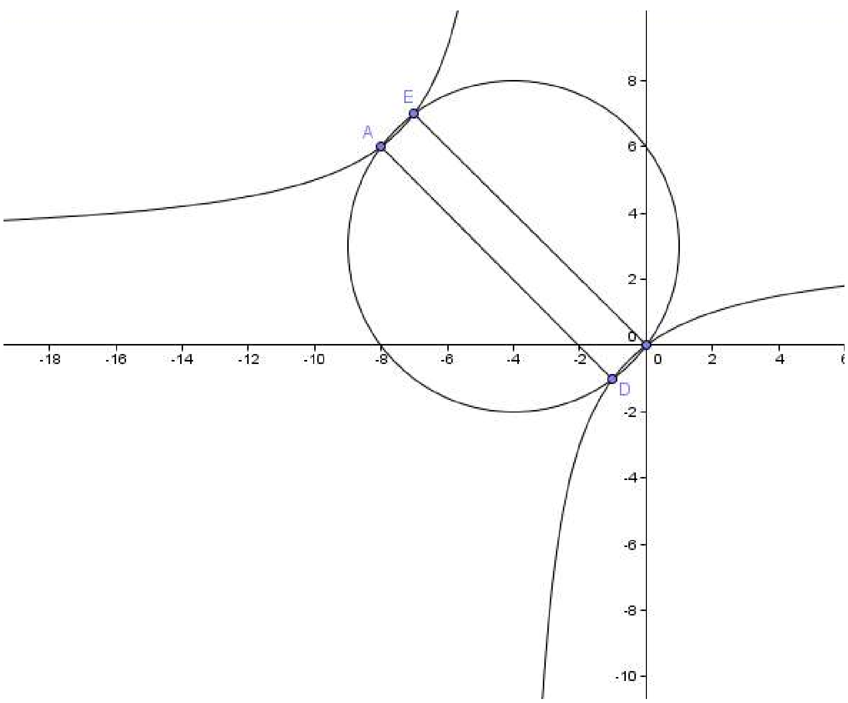
	1	16	71	56
-8		-8	-64	-56
	1	8	7	--

$x^2 + 8x + 7 = 0 \qquad x_1 = -1 \qquad x_2 = -7$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ y = \dfrac{3(-1)}{-1+4} = -1 \end{cases} \quad D(-1;1) \qquad \begin{cases} x_2 = -7 \\ y = \dfrac{3(-7)}{-7+4} = \dfrac{-21}{-3} = 7 \end{cases} \quad E(-7;7)$$

d) $\overline{AE} = \sqrt{(-8+7)^2 + (6-7)^2} = \sqrt{2} \qquad \overline{OE} = \sqrt{(-7)^2 + 7^2} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$

$A_{ADOE} = \overline{AE} \cdot \overline{OE} = \sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} = 14$



2) Dimostra che l’iperbole riferita ai propri assi è una curva aperta composta di due rami esterni al rettangolo passante per i suoi vertici.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ricavo le ordinate dei punti dell’iperbole: $y^2 = b^2\left(\dfrac{x^2}{a^2} - 1\right) \qquad y^2 = \dfrac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ questa espressione ha significato solo se $x \le -a \vee x \ge a$

ricavo le ascisse dei punti dell'iperbole: $x^2 = a^2(\frac{y^2}{b^2} + 1)$ $x^2 = \frac{b^2}{a^2}(y^2 + b^2)$ questa espressione ha significato per qualunque valore di y. Quindi l'iperbole è esterna rispetto alle rette passanti per i suoi vertici reali.