

## Prova di Matematica - Classi Quarte - 03/05/2010

---

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

### Problemi

**Problema 1** Dato il trapezio rettangolo  $ABCD$ , di base maggiore  $AB$  e lato obliquo  $BC$ , circoscritto ad un cerchio di raggio unitario e centro  $O$ , sia  $H$  il punto di tangenza del lato obliquo  $BC$  con la circonferenza.

- Posto  $\widehat{BOH} = x$ , determina perimetro e area del trapezio in funzione dell'angolo  $x$  e trova i valori di  $x$  per i quali il perimetro vale  $\frac{4(3+2\sqrt{3})}{3}$ .
- Relativamente al valore maggiore di  $x$  trovato e riferendosi ad un sistema di assi coordinati con origine in  $D$  e assi passanti per i lati  $DA$  e  $DC$ , determina l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio e l'equazione del lato  $BC$ .
- Scrivi l'equazione del lato  $BD$  e calcola l'angolo che tale lato forma con l'asse  $x$ , esprimendolo in gradi sessagesimali, primi e secondi.
- Calcola la superficie totale del solido che si ottiene con una rotazione completa del trapezio intorno alla sua base maggiore.

**Problema 2** È dato il fascio di equazione

$$\Gamma: y = \frac{x + 4k - 3}{kx + 3k - 2}.$$

- Descrivi cosa rappresenta il fascio e trova i punti base.
- Trova e rappresenta la curva del fascio che ha un asintoto in  $x = 5$  e determina la sua tangente nel punto di ascissa 1.
- Le lunghezze dei lati di un triangolo sono tre numeri interi consecutivi. Posta uguale ad  $x$  la misura del minore dei tre, trova il coseno dell'angolo minore e osserva che, posto tale coseno uguale ad  $y$ , la curva  $y = f(x)$  che si ottiene appartiene al fascio  $\Gamma$ .
- Supposto che il triangolo suddetto abbia perimetro  $6a$ , trova la misura dei lati, verifica che l'angolo maggiore è il doppio dell'angolo minore, stabilisci se il triangolo è acutangolo od ottusangolo e trovanne l'area.

## Questionario

**Quesito 1** Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x + 1) \cos x} \leq 0$$

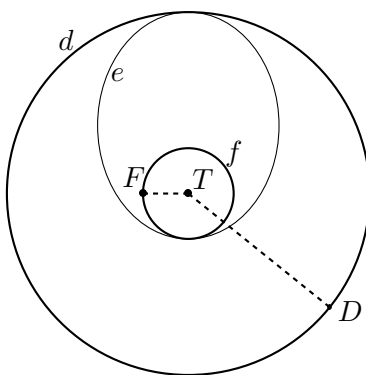
**Quesito 2** I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 *cm*. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

**Quesito 3** Si determini il dominio della funzione  $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$ .

**Quesito 4** Una persona, ferma sulla riva di un canale, vede un albero sulla riva opposta sotto l'angolo di  $58^\circ 15'$ . Retrocedendo di 50 *m* lo vede, invece, sotto un angolo di  $26^\circ 15'$ . Calcolare l'altezza dell'albero e la larghezza del canale.

**Quesito 5** Un triangolo equilatero  $ABC$  ha lato di lunghezza 4. Siano  $M$  e  $N$  rispettivamente i punti medi di  $AC$  e  $BC$ . Si consideri un generico punto  $P$  di  $AB$ . Esprimere in funzione della lunghezza di  $AP$  la radice quadrata della somma dei quadrati delle lunghezze di  $MP$  e  $PN$ . Rappresentare la funzione ottenuta mettendone in evidenza il tratto relativo al problema.

**Quesito 6** (*Hohmann transfer*) Il punto  $T$  in figura è il centro della Terra e le circonferenze  $d$  ed  $f$  rappresentano orbite satellitari circolari con centro in  $T$ . L'orbita  $e$ , ellittica, ha fuoco in  $T$ . I segmenti in figura valgono  $\overline{TF} = 2R$  e  $\overline{TD} = 8R$ , con  $R$  raggio della Terra. Posto  $R = 1$  e scelto un opportuno sistema di riferimento, scrivere le equazioni delle circonferenze  $d$  ed  $e$  e l'equazione dell'ellisse  $e$ .



**Quesito 7** Data l'iperbole di equazione  $x^2 - 4y^2 = 20$ , determina la tangente  $t$  nel suo punto  $P$  di ordinata 2, appartenente al II quadrante. Scrivi l'equazione della normale  $n$  alla retta  $t$ . Dimostra che tali rette sono bisettrici degli angoli formati dalle rette  $PF_1$  e  $PF_2$ , con  $F_1$  e  $F_2$  fuochi dell'iperbole.

**Quesito 8** Su un punto materiale vengono applicate due forze di intensità  $8N$  e  $6N$ ; l'angolo tra essi compreso è di  $120^\circ$ . Trovare il modulo del vettore risultante e l'angolo che tale vettore forma con ciascuno degli altri due.

**Quesito 9** Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio  $r$  è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

**Quesito 10** Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione:

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}.$$

Alberto ottiene come soluzione gli angoli  $x$  tali che:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad (k \text{ intero qualsiasi});$$

Gianna trova la seguente soluzione:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \text{ intero qualsiasi}).$$

È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.