

Prova di Matematica - Classi Quarte - 03/05/2010

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

Problemi

Problema 1 Dato il trapezio rettangolo $ABCD$, di base maggiore AB e lato obliquo BC , circoscritto ad un cerchio di raggio unitario e centro O , sia H il punto di tangenza del lato obliquo BC con la circonferenza.

- Posto $\widehat{BOH} = x$, determina perimetro e area del trapezio in funzione dell'angolo x e trova i valori di x per i quali il perimetro vale $\frac{4(3+2\sqrt{3})}{3}$.
- Relativamente al valore maggiore di x trovato e riferendosi ad un sistema di assi coordinati con origine in D e assi passanti per i lati DA e DC , determina l'equazione della circonferenza inscritta nel trapezio e l'equazione del lato BC .
- Scrivi l'equazione del lato BD e calcola l'angolo che tale lato forma con l'asse x , esprimendolo in gradi sessagesimali, primi e secondi.
- Calcola la superficie totale del solido che si ottiene con una rotazione completa del trapezio intorno alla sua base maggiore.

Problema 2 È dato il fascio di equazione

$$\Gamma: y = \frac{x + 4k - 3}{kx + 3k - 2}.$$

- Descrivi cosa rappresenta il fascio e trova i punti base.
- Trova e rappresenta la curva del fascio che ha un asintoto in $x = 5$ e determina la sua tangente nel punto di ascissa 1.
- Le lunghezze dei lati di un triangolo sono tre numeri interi consecutivi. Posta uguale ad x la misura del minore dei tre, trova il coseno dell'angolo minore e osserva che, posto tale coseno uguale ad y , la curva $y = f(x)$ che si ottiene appartiene al fascio Γ .
- Supposto che il triangolo suddetto abbia perimetro $6a$, trova la misura dei lati, verifica che l'angolo maggiore è il doppio dell'angolo minore, stabilisci se il triangolo è acutangolo od ottusangolo e trovanne l'area.

Questionario

Quesito 1 Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{\operatorname{tg}^4 x - \operatorname{tg}^2 x}{(\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x + 1) \cos x} \leq 0$$

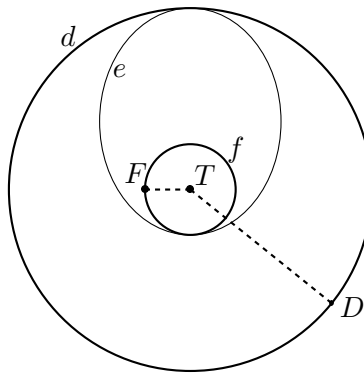
Quesito 2 I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 *cm*. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.

Quesito 3 Si determini il dominio della funzione $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$.

Quesito 4 Una persona, ferma sulla riva di un canale, vede un albero sulla riva opposta sotto l'angolo di $58^\circ 15'$. Retrocedendo di 50 *m* lo vede, invece, sotto un angolo di $26^\circ 15'$. Calcolare l'altezza dell'albero e la larghezza del canale.

Quesito 5 Un triangolo equilatero ABC ha lato di lunghezza 4. Siano M e N rispettivamente i punti medi di AC e BC . Si consideri un generico punto P di AB . Esprimere in funzione della lunghezza di AP la radice quadrata della somma dei quadrati delle lunghezze di MP e PN . Rappresentare la funzione ottenuta mettendone in evidenza il tratto relativo al problema.

Quesito 6 (*Hohmann transfer*) Il punto T in figura è il centro della Terra e le circonferenze d ed f rappresentano orbite satellitari circolari con centro in T . L'orbita e , ellittica, ha fuoco in T . I segmenti in figura valgono $\overline{TF} = 2R$ e $\overline{TD} = 8R$, con R raggio della Terra. Posto $R = 1$ e scelto un opportuno sistema di riferimento, scrivere le equazioni delle circonferenze d ed e e l'equazione dell'ellisse e .



Quesito 7 Data l'iperbole di equazione $x^2 - 4y^2 = 20$, determina la tangente t nel suo punto P di ordinata 2, appartenente al II quadrante. Scrivi l'equazione della normale n alla retta t . Dimostra che tali rette sono bisettrici degli angoli formati dalle rette PF_1 e PF_2 , con F_1 e F_2 fuochi dell'iperbole.

Quesito 8 Su un punto materiale vengono applicate due forze di intensità $8N$ e $6N$; l'angolo tra essi compreso è di 120° . Trovare il modulo del vettore risultante e l'angolo che tale vettore forma con ciascuno degli altri due.

Quesito 9 Si dimostri che il volume del cilindro equilatero inscritto in una sfera di raggio r è medio proporzionale fra il volume del cono equilatero inscritto e il volume della sfera.

Quesito 10 Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione:

$$\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}.$$

Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che:

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{5}{12}\pi + k\pi \quad (k \text{ intero qualsiasi});$$

Gianna trova la seguente soluzione:

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \quad (k \text{ intero qualsiasi}).$$

È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.