

PROBLEMA PAG. L 204 N. 115

Determina l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione  $x - 3y - 1 = 0$  con la parabola di equazione  $x = -y^2 + 2y + 1$  ed F è il fuoco della parabola.  $\left[ S = \frac{9}{8} \right]$

SOLUZIONE

disegno la parabola  $x = -y^2 + 2y + 1$

$a = -1$  conc. verso sinistra

$$\text{asse: } y = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2(-1)} = 1$$

$$\text{vertice: } V\left(-\frac{\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right)$$

$$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4 - 4(-1)1}{4(-1)} = -\frac{8}{-4} = 2 \quad V(2,1)$$

intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ -y^2 + 2y + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ y^2 - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -- \\ y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+1} \end{cases}$$

$$E(0, 1 - \sqrt{2}) \quad L(0, 1 + \sqrt{2})$$

Calcolo le coordinate del fuoco

$$\text{fuoco: } F\left(\frac{1-\Delta}{4a}, -\frac{b}{2a}\right) \quad \frac{1-\Delta}{4a} = \frac{1-8}{4(-1)} = -\frac{-7}{4} \quad F\left(\frac{7}{4}, 1\right)$$

Calcolo le coordinate di A e B

$$\begin{cases} x = -y^2 + 2y + 1 \\ x - 3y - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y^2 + 2y + 1 \\ x = 3y + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y + 1 = -y^2 + 2y + 1 \\ -- \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 + y = 0 \\ -- \end{cases}$$

$$A \begin{cases} y_1 = -1 \\ x_1 = 3(-1) + 1 = -2 \end{cases} \quad B \begin{cases} y_2 = 0 \\ x_2 = 3(0) + 1 = 1 \end{cases}$$

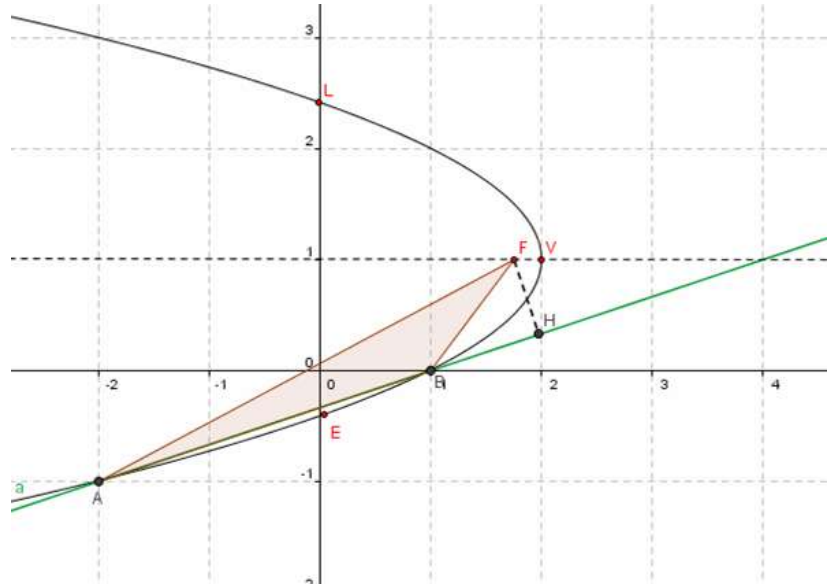
$$A(-2, -1) \quad B(1, 0)$$

Per trovare l'area del triangolo ABF considero la base AB e l'altezza FH relativa a tale base:

$$\overline{AB} = \sqrt{(1+2)^2 + (1+0)^2} = \sqrt{10}$$

$$\overline{FH} = \frac{|x_F - 3y_F - 1|}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{\left|\frac{7}{4} - 3 - 1\right|}{\sqrt{10}} = \frac{9}{4} \frac{\sqrt{10}}{10} = \frac{9\sqrt{10}}{40}$$

$$S_{ABF} = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{FH}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{10} \frac{9\sqrt{10}}{40} = \frac{9}{8}$$



PROBLEMA PAG. L 204 N. 116

Data la parabola di equazione  $y = 2x^2 - 8x$ , trova la misura della corda AB che si ottiene intersecando la parabola con la retta di equazione  $y = 3x - 12$ . Determina poi sull'asse y un punto C che forma con A e B un triangolo isoscele ABC di base AB.

$$\left[ \overline{AB} = \frac{5}{2}\sqrt{10}; C\left(0; -\frac{17}{6}\right) \right]$$

SOLUZIONE

disegno la parabola  $y = 2x^2 - 8x$

$a = 2 > 0$  conc. verso l'alto

$$\text{asse: } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(2)} = 2$$

$c = 0 \Rightarrow$  la parabola passa per  $O(0,0)$

$$\text{vertice: } V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$-\frac{b^2}{4a} = -\frac{64}{4(2)} = -8 \quad V(2, -8)$$

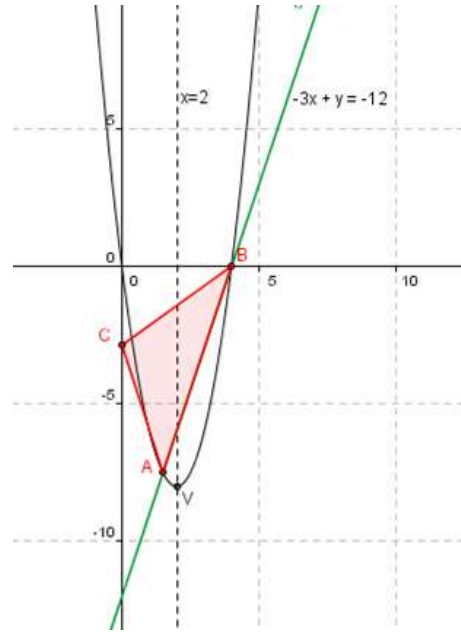
intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x^2 - 8x \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x^2 - 8x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x(2x - 8) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$O(0,0)$   $B(4,0)$

Disegno la retta  $y = 3x - 12$



Calcolo le coordinate di A e B

$$\begin{cases} y = 3x - 12 \\ y = 2x^2 - 8x \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 3x - 12 = 2x^2 - 8x \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x^2 - 11x + 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4} = \left\langle \frac{4}{2} \right\rangle \end{cases}$$

$$A \begin{cases} y_1 = 3 \cdot \frac{3}{2} - 12 = -\frac{15}{2} \\ x_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \quad B \begin{cases} y_2 = 3 \cdot 4 - 12 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \quad A\left(\frac{3}{2}; -\frac{15}{2}\right) \quad B(4;0)$$

Calcolo la lunghezza di AB

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{10}$$

Determino le coordinate di C imponendo AC sia uguale a BC e che C abbia ascissa nulla, cioè  $C(0; y_c)$ :

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y_c - \frac{15}{2}\right)^2 = 4^2 + y_c^2 \quad \frac{9}{4} + y_c^2 + \frac{225}{4} - 15y_c = 16 + y_c^2 \quad 15y_c = -\frac{234}{4} + 16 \quad y_c = -\frac{85}{2} \cdot \frac{1}{15} = -\frac{17}{6}$$

PROBLEMA PAG. L 204 N. 121

Date le parabole di equazione  $y = -x^2 + 4x + 2$  e  $y = x^2 - 3x$ , conduci una retta parallela all'asse x in modo che intercetti corde uguali sulle due parabole.

$$\left[ y = \frac{15}{8} \right]$$

SOLUZIONE

disegno la parabola  $y = x^2 - 3x$

$a = 1 > 0$  conc. verso l'alto

asse :  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2(1)} = \frac{3}{2}$

$c = 0 \Rightarrow$  la parabola passa per  $O(0,0)$

vertice :  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$

$-\frac{b^2}{4a} = -\frac{9}{4(1)} = -\frac{9}{4} \quad V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$

intersezioni con gli assi

$O(0,0) \quad B(3,0)$

disegno la parabola  $y = -x^2 + 4x + 2$

$a = -1$  conc. verso il basso

asse :  $x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$

vertice :  $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16 - 4(-1)2}{4(-1)} = -\frac{24}{-4} = 6 \quad V(2,6)$

intersezioni con gli assi

$E(2 - \sqrt{2}; 0) \quad L(2 + \sqrt{2}; 0)$

Determino la retta  $y = k$  imponendo l'uguaglianza  $\overline{CC'} = \overline{FF'}$  della lunghezza delle corde che le parabole 'staccano' sulla retta stessa. I punti C, C', F, F' hanno tutti la stessa ordinata, determino quindi le loro ascisse:

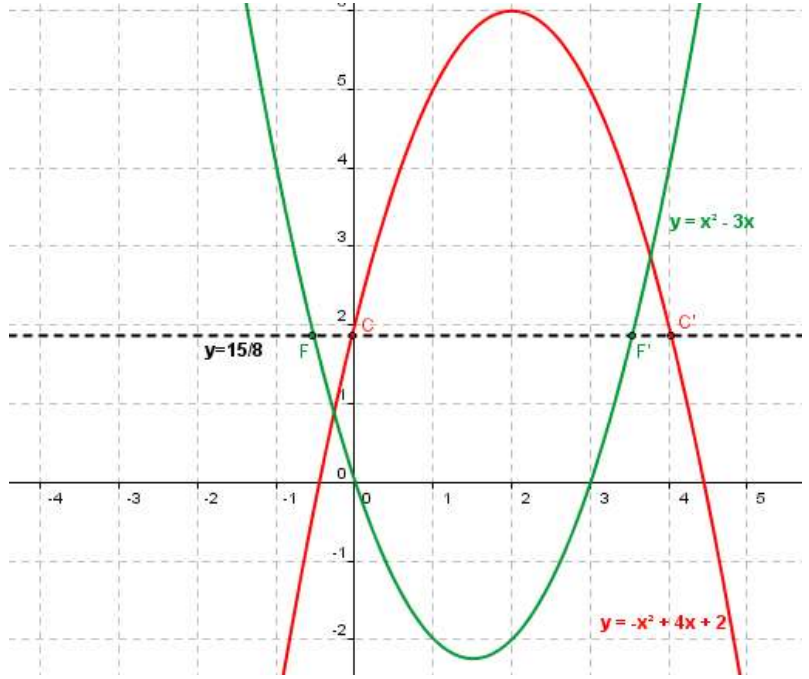
$$\begin{cases} y = k \\ y = -x^2 + 4x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x^2 - 4x - 2 + k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - (-2 + k)} = 2 \pm \sqrt{6 - k} \end{cases}$$

$C(2 - \sqrt{6 - k}; k) \quad C'(2 + \sqrt{6 - k}; k)$

$$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 - 3x \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x^2 - 3x - k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4k}}{2} \end{cases}$$

$F\left(\frac{-3 - \sqrt{9 + 4k}}{2}; k\right) \quad F'\left(\frac{-3 + \sqrt{9 + 4k}}{2}; k\right)$

calcolo la lunghezza di ciascuna corda



$$\overline{CC'} = \left| 2 + \sqrt{6-k} - (2 - \sqrt{6-k}) \right| = 2\sqrt{6-k}$$

$$\overline{FF'} = \left| \frac{-3 + \sqrt{9+4k}}{2} - \frac{-3 - \sqrt{9+4k}}{2} \right| = \left| \frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{9+4k}}{2} - \frac{-3}{2} - \frac{-\sqrt{9+4k}}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{9+4k}}{2} + \frac{\sqrt{9+4k}}{2} \right| = \sqrt{9+4k}$$

impongo che le due corde siano uguali

$$\overline{CC'} = \overline{FF'}$$

$$2\sqrt{6-k} = \sqrt{9+4k}$$

$$4(6-k) = 9+4k$$

$$24 - 4k = 9 + 4k$$

$$8k = 15 \quad k = \frac{15}{8}$$

La retta cercata ha equazione  $y = \frac{15}{8}x$  ed è mostrata in figura.

**PROBLEMA PAG. L 189 n. 2**

Determina l'equazione della circonferenza di diametro MN, dove i punti M e N sono i punti di intersezione della retta di equazione  $y = 2x + 2$  con la parabola con il vertice nel punto V(2;9) e passante per il punto P(5;0).

$$[x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0]$$

**SOLUZIONE**

determino l'equazione della parabola ipotizzando che abbia l'asse di simmetria // asse y

$$y - y_V = a(x - x_V)^2$$

sostituisco le coordinate del vertice V(2;9)

$$y - 9 = a(x - 2)^2 \quad (*)$$

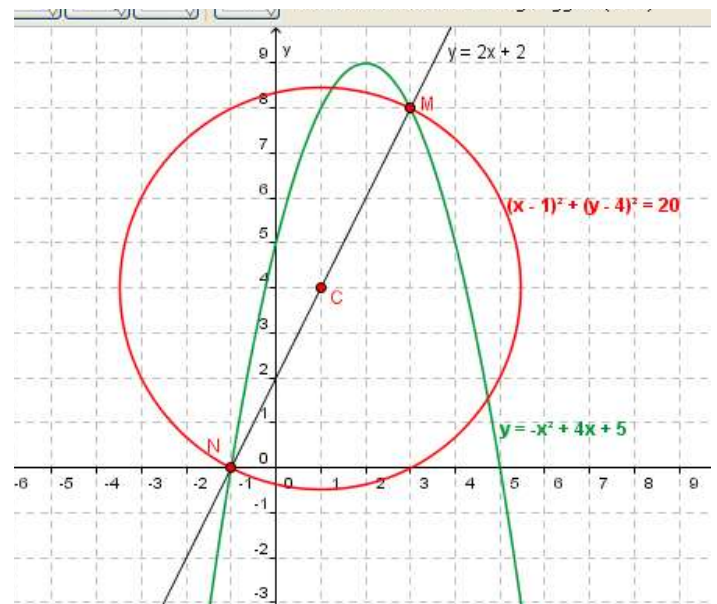
uso l'appartenenza del punto P(5;0)

$$0 - 9 = a(5 - 2)^2$$

$$-9 = a \cdot 9 \quad a = -1$$

sostituisco in (\*) e sviluppo i calcoli

$$y = -x^2 + 4x + 5.$$



Determino M e N, intersezioni tra retta e parabola

$$\begin{cases} y = 2x + 2 \\ y = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ 2x + 2 = -x^2 + 4x + 5 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \quad M \begin{cases} y_1 = 2 \cdot 3 + 2 = 8 \\ x_1 = 3 \end{cases} \quad N \begin{cases} y_1 = 2 \cdot (-1) + 2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases}$$

M(3;8) N(-1;0)

Determino il raggio della circonferenza  $r = \frac{\overline{MN}}{2} = \frac{\sqrt{4^2 + 8^2}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = 2\sqrt{5}.$

Determino il centro come punto medio del diametro MN C(1;4). Scrivo l'equazione della circonferenza:

$$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 20 \quad x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 + 16 - 20 = 0 \quad x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0.$$