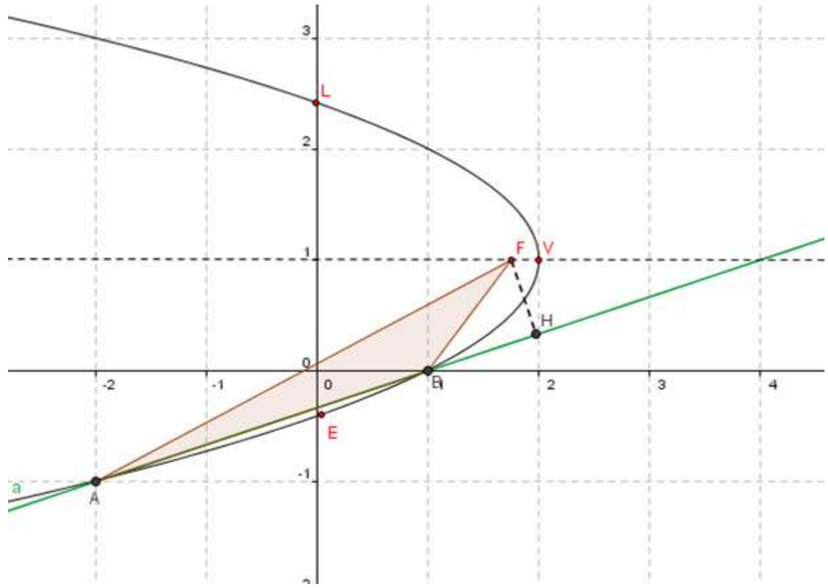
PROBLEMA PAG. L 204 N. 115

Determina l'area del triangolo ABF, dove A e B sono i punti di intersezione della retta di equazione $x-3y-1=0$ con la parabola di equazione $x=-y^2+2y+1$ ed F è il fuoco della parabola. $\left[S=\frac{9}{8}\right]$

SOLUZIONE

disegno la parabola $x=-y^2+2y+1$




$a=-1$ conc. verso sinistra

$asse: \quad y=-\frac{b}{2a}=-\frac{2}{2(-1)}=1$

$vertice: \quad V\left(-\frac{\Delta}{4a},-\frac{b}{2a}\right)$

$-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{4-4(-1)1}{4(-1)}=-\frac{8}{-4}=2 \qquad \mathrm{V}(2,1)$

intersezioni con gli assi

$\begin{cases} x=0 \\ -y^2+2y+1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -- \\ y^2-2y-1=0 \end{cases}$

$\begin{cases} -- \\ y_{1,2}=1\pm\sqrt{1+1} \end{cases}$

$\mathrm{E}\left(0,1-\sqrt{2}\right) \quad \mathrm{L}\left(0,1+\sqrt{2}\right)$

Calcolo le coordinate del fuoco

$fuoco: \quad F\left(\frac{1-\Delta}{4a},-\frac{b}{2a}\right) \qquad \frac{1-\Delta}{4a}=\frac{1-8}{4(-1)}=-\frac{-7}{4} \qquad \mathrm{F}\left(\frac{7}{4},1\right)$

Calcolo le coordinate di A e B

$\begin{cases} x=-y^2+2y+1 \\ x-3y-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-y^2+2y+1 \\ x=3y+1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y+1=-y^2+2y+1 \\ -- \end{cases} \qquad \begin{cases} y^2+y=0 \\ -- \end{cases}$

$\mathrm{A}\begin{cases} y_1=-1 \\ x_1=3(-1)+1=-2 \end{cases} \qquad \mathrm{B}\begin{cases} y_2=0 \\ x_2=3(0)+1=1 \end{cases}$

A(-2,-1) $\quad B(1,0)$

Per trovare l'area del triangolo ABF considero la base AB e l'altezza FH relativa a tale base:

$$\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(1+0)^2}=\sqrt{10}$$

$$\overline{FH}=\frac{|x_F-3y_F-1|}{\sqrt{1+3^2}}=\frac{\left|\frac{7}{4}-3-1\right|}{\sqrt{10}}=\frac{9}{4}\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{9\sqrt{10}}{40}$$

$$S_{ABF}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{FH}}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{10}\,\frac{9\sqrt{10}}{40}=\frac{9}{8}$$

PROBLEMA PAG. L 204 N. 116

Data la parabola di equazione $y = 2x^2 - 8x$, trova la misura della corda AB che si ottiene intersecando la parabola con la retta di equazione $y = 3x - 12$. Determina poi sull'asse y un punto C che forma con A e B un triangolo isoscele ABC di base AB. $\left[\overline{AB} = \frac{5}{2}\sqrt{10}; C\left(0; -\frac{17}{6}\right)\right]$

SOLUZIONE

disegno la parabola $y = 2x^2 - 8x$

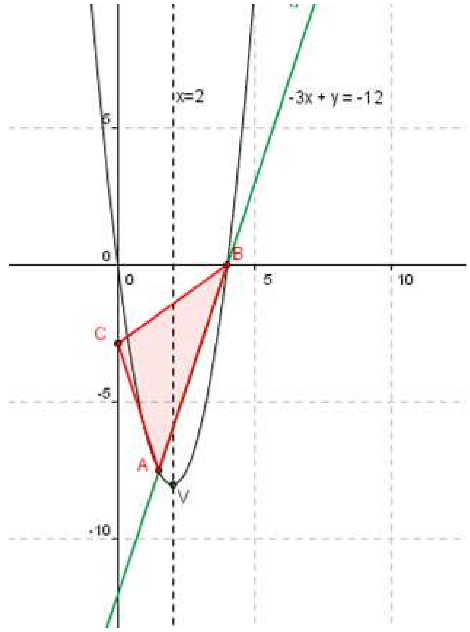
$a = 2 > 0$ conc. verso l'alto

$$asse: \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2(2)} = 2$$

$c = 0 \Rightarrow$ la parabola passa per O(0,0)

$$vertice: \quad V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$$

$$-\frac{b^2}{4a} = -\frac{64}{4(2)} = -8 \qquad V(2,-8)$$




intersezioni con gli assi

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = 2x^2 - 8x \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ 2x^2 - 8x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x(2x-8) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases}$$

$O(0,0) \quad B(4,0)$

Disegno la retta $y = 3x - 12$

Calcolo le coordinate di A e B

$$\begin{cases} y = 3x - 12 \\ y = 2x^2 - 8x \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ 3x - 12 = 2x^2 - 8x \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ 2x^2 - 11x + 12 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{4} = \frac{11 \pm 5}{4} = \left\langle {4 \atop \frac{3}{2}} \right. \end{cases}$$

$$A\begin{cases} y_1 = 3\frac{3}{2} - 12 = -\frac{15}{2} \\ x_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \qquad B\begin{cases} y_2 = 3 \cdot 4 - 12 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases} \qquad A(\frac{3}{2}; -\frac{15}{2}) \qquad B(4;0)$$

Calcolo la lunghezza di AB

$$\overline{AB} = \sqrt{\left(4 - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{15}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}\sqrt{10}$$

Determino le coordinate di C imponendo AC sia uguale a BC e che C abbia ascissa nulla, cioe' C(0;$y_C$):

$$\overline{AC} = \overline{BC} \Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y_C - \frac{15}{2}\right)^2 = 4^2 + y_C^2 \qquad \frac{9}{4} + y_C^2 + \frac{225}{4} - 15y_C = 16 + y_C^2 \quad 15y_C = -\frac{234}{4} + 16 \qquad y_C = -\frac{85}{2}\frac{1}{15} = -\frac{17}{6}$$

PROBLEMA PAG. L 204 N. 121

Date le parabole di equazione $y = -x^2 + 4x + 2$ e $y = x^2 - 3x$, conduci una retta parallela all'asse x in modo che intercetti corde uguali sulle due parabole. $\left[ y = \frac{15}{8} \right]$

SOLUZIONE

disegno la parabola $y = x^2 - 3x$

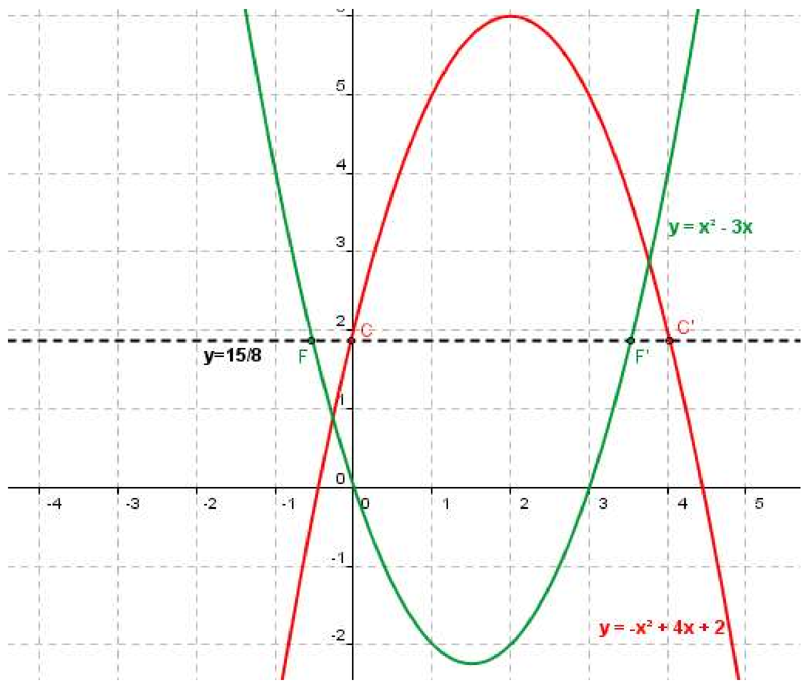
$a = 1 > 0$ conc. verso l'alto

$asse: \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2(1)} = \frac{3}{2}$

$c = 0 \Rightarrow$ la parabola passa per O(0,0)

$vertice: \quad V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2}{4a}\right)$

$-\frac{b^2}{4a} = -\frac{9}{4(1)} = -\frac{9}{4} \qquad V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right)$




intersezioni con gli assi

$O(0,0) \quad B(3,0)$

disegno la parabola $y = -x^2 + 4x + 2$

$a = -1$ conc. verso il basso

$asse: \quad x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-1)} = 2$

$vertice: \quad V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

$-\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16 - 4(-1)2}{4(-1)} = -\frac{24}{-4} = 6 \qquad V(2,6)$

intersezioni con gli assi

$E\left(2 - \sqrt{2}; 0\right) \quad L\left(2 + \sqrt{2}; 0\right)$

Determino la retta $y = k$ imponendo l'uguaglianza $\overline{CC'} = \overline{FF'}$ della lunghezza delle corde che le parabole 'staccano' sulla retta stessa. I punti C, C', F, F' hanno tutti la stessa ordinata, determino quindi le loro ascisse:

$\begin{cases} y = k \\ y = -x^2 + 4x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x^2 - 4x - 2 + k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - (-2 + k)} = 2 \pm \sqrt{6 - k} \end{cases}$

$C\left(2 - \sqrt{6 - k}; k\right) \quad C'\left(2 + \sqrt{6 - k}; k\right)$

$\begin{cases} y = k \\ y = x^2 - 3x \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x^2 - 3x - k = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 4k}}{2} \end{cases}$

$F\left(\frac{-3 - \sqrt{9 + 4k}}{2}; k\right) \quad F'\left(\frac{-3 + \sqrt{9 + 4k}}{2}; k\right)$

calcolo la lunghezza di ciascuna corda

$\overline{CC'} = \left|2 + \sqrt{6-k} - (2 - \sqrt{6-k})\right| = 2\sqrt{6-k}$

$\overline{FF'} = \left|\frac{-3+\sqrt{9+4k}}{2} - \frac{-3-\sqrt{9+4k}}{2}\right| = \left|\frac{-3}{2} + \frac{\sqrt{9+4k}}{2} - \frac{-3}{2} - \frac{-\sqrt{9+4k}}{2}\right| = \left|\frac{\sqrt{9+4k}}{2} + \frac{\sqrt{9+4k}}{2}\right| = \sqrt{9+4k}$

impongo che le due corde siano uguali

$\overline{CC'} = \overline{FF'}$

$2\sqrt{6-k} = \sqrt{9+4k}$

$4(6-k) = 9+4k$

$24-4k = 9+4k$

$8k = 15 \qquad k = \frac{15}{8}$

La retta cercata ha equazione $y = \frac{15}{8}$ ed è mostrata in figura.

PROBLEMA PAG. L 189 N. 2

Determina l'equazione della circonferenza di diametro MN, dove i punti M e N sono i punti di intersezione della retta di equazione $y = 2x+2$ con la parabola con il vertice nel punto V(2;9) e passante per il punto P(5;0).

$\left[x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0\right]$

SOLUZIONE

determino l'equazione della parabola ipotizzando che abbia l'asse di simmetria // asse y

$y - y_V = a(x - x_V)^2$

sostituisco le coordinate del vertice V(2;9)

$y - 9 = a(x-2)^2 \qquad (*)$

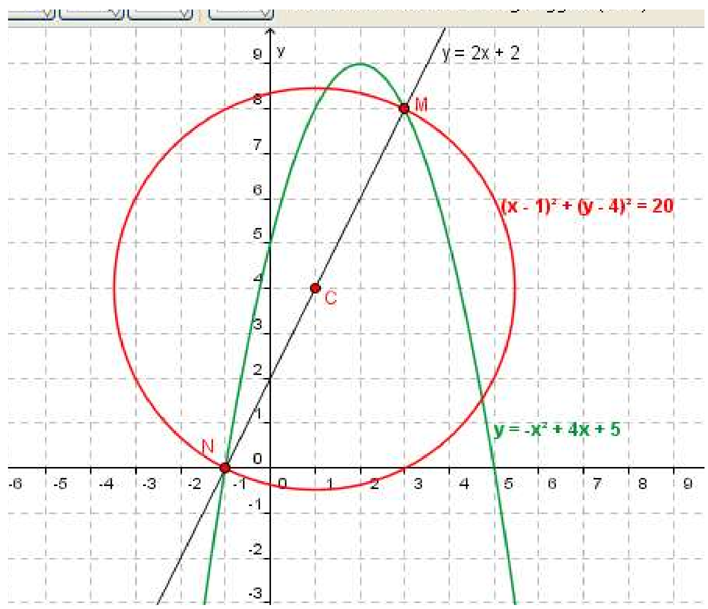
uso l'appartenenza del punto P(5;0)

$0 - 9 = a(5-2)^2$

$-9 = a \cdot 9 \qquad a = -1$

sostituisco in (*) e sviluppo i calcoli

$y = -x^2 + 4x + 5$.




Determino M e N, intersezioni tra retta e parabola

$\begin{cases} y = 2x+2 \\ y = -x^2+4x+5 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ 2x+2 = -x^2+4x+5 \end{cases} \quad \begin{cases} -- \\ x^2-2x-3=0 \end{cases} \quad M\begin{cases} y_1 = 2\cdot 3+2 = 8 \\ x_1 = 3 \end{cases} \quad N\begin{cases} y_1 = 2\cdot(-1)+2 = 0 \\ x_1 = -1 \end{cases}$

$M(3;8) \quad N(-1;0)$

Determino il raggio della circonferenza $r = \frac{\overline{MN}}{2} = \frac{\sqrt{4^2+8^2}}{2} = \frac{\sqrt{80}}{2} = 2\sqrt{5}$.

Determino il centro come punto medio del diametro MN $C(1;4)$. Scrivo l'equazione della circonferenza:

$(x-1)^2 + (y-4)^2 = 20 \qquad x^2 + y^2 - 2x - 8y + 1 + 16 - 20 = 0 \qquad x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$.