

## QUARTO CONTRAPPUNTO

### I PROBLEMI:

### UNA VISIONE DINAMICA

Risolvere i seguenti problemi di carattere geometrico che conducono alla soluzione di disequazioni.

- 1 Inscrivere in una circonferenza di raggio  $r$  un triangolo isoscele e determinare per quali valori dell'altezza essa è minore del triplo della base.

$$\left[ \sqrt{-x^2 + 2rx} > \frac{x}{6}; 0 < x < \frac{72r}{37} \right]$$

- 2 Inscrivere in una circonferenza di raggio  $r$  un triangolo isoscele e determinare per quali valori  $x$  dell'altezza è positiva la differenza tra il doppio della base e l'altezza.

$$\left[ \sqrt{-x^2 + 2rx} > \frac{x}{4}; 0 < x < \frac{32r}{17} \right]$$

- 3 Data una circonferenza di centro  $O$  e raggio unitario determinare per quali valori di una corda  $AB$ , il triplo della sua distanza dal centro è maggiore della corda stessa.

$$\left[ AB = 2x; \sqrt{1-x^2} > \frac{2x}{3}; 0 \leq x < 3 \frac{\sqrt{13}}{13} \right]$$

- 4 Data una semicirconferenza  $\Gamma$  di raggio unitario, sia  $AB$  una corda parallela al diametro, proiettarla sulla tangente a  $\Gamma$  a essa parallela e indicare con  $A'$ ,  $B'$  le proiezioni. Determinare per quali valori di  $AB$  il perimetro del rettangolo  $ABB'A'$  è minore di 2.

$$\left[ AB = 2x; \sqrt{1-x^2} > 2x; 0 \leq x < \frac{\sqrt{5}}{5} \right]$$

- 5 Inscrivere in una semicirconferenza di raggio unitario un rettangolo che ha la base sul diametro e determinare per quali valori dell'altezza il suo perimetro è minore di 3.

$$\left[ \sqrt{1-x^2} < \frac{3}{4} - \frac{x}{2}; x \leq 1 \right]$$

- 6 Sia  $ABC$  un triangolo rettangolo di ipotenusa  $BC = 2a$  e sia  $H$  la proiezione di  $A$  sull'ipotenusa. Determinare per quali valori  $x$  di  $HB$  è soddisfatta la relazione  $AB < \sqrt{3}AH$ .

$$\left[ \sqrt{\frac{2ax}{3}} < \sqrt{2ax - x^2}; 0 < x < \frac{4a}{3} \right]$$

- 7 Una circonferenza  $\Gamma$  ha centro  $O$  e raggio  $r$ . Siano:  $t$  una retta tangente a  $\Gamma$ ,  $s$  una retta parallela a  $t$  che interseca  $\Gamma$  in due punti distinti  $A$ ,  $B$  e siano  $H$ ,  $K$  le proiezioni di  $A$ ,  $B$  su  $t$ . Determinare per quali valori  $x$  della distanza fra le due rette il perimetro del rettangolo  $ABHK$  è maggiore di  $4r$ .

$$\left[ \sqrt{2rx - x^2} > r - \frac{1}{2}x; \frac{2r}{5} < x < 2r \right]$$

- 8 Una semicirconferenza  $\Gamma$  ha diametro  $AB = 2r$ ,  $MN$  è una corda parallela al diametro; indicata con  $H$  la proiezione del centro  $C$  di  $\Gamma$  su  $MN$ , determinare per quali valori  $x$  di  $CH$  è verificata la relazione  $MN < CH$ .

$$\left[ \sqrt{r^2 - x^2} < \frac{1}{2}x; \frac{2r}{\sqrt{5}} < x \leq r \right]$$

- 9 Data una semicirconferenza  $\Gamma$  di centro  $O$  e raggio 2, circoscrivere a  $\Gamma$  un trapezio isoscele  $ABCD$  di base maggiore  $AB$  e indicare con  $T$  il punto in cui il lato  $AD$  è tangente a  $\Gamma$ , con  $H$  la proiezione di  $D$  su  $AB$ . Dimostrare che i triangoli  $AOT$ ,  $ADH$  sono congruenti e determinare per quali valori  $x$  di  $AT$  il perimetro del trapezio è minore di 12.

$$\left[ \sqrt{4+x^2} < 2 + \frac{x}{3}; 0 < x < \frac{3}{2} \right]$$

- 10 Due semicirconferenze  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  hanno i diametri  $AB = 2$  e  $BC = 4$  adiacenti e sono situate nello stesso semipiano da essi generato; una retta  $r$  parallela ai diametri stacca su  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  due corde  $MN$ ,  $PQ$ . Determinare per quali posizioni di  $r$  è soddisfatta la relazione  $MN + PQ > BC$ .

$$\left[ x \text{ distanza di } r \text{ dai diametri}; \sqrt{4-x^2} + \sqrt{1-x^2} > 2; 0 \leq x < \frac{\sqrt{15}}{4} \right]$$

- 11 Un trapezio rettangolo ha la base maggiore  $AB = 2$  e la diagonale  $AC$  perpendicolare al lato obliquo  $BC$ . Determinare per quali valori  $x$  della base  $CD$  è verificata la relazione  $AD < DC - \frac{2AB}{5}$ .

$$\left[ \sqrt{-x^2 + 2x} < x - \frac{4}{5}; \frac{8}{5} < x \leq 2 \right]$$

- 12 Data una semicirconferenza  $\Gamma$  di diametro  $AB = 2$ , indicare con  $P$  un punto di  $\Gamma$  e con  $H$  la proiezione di  $P$  su  $AB$ . Determinare per quali valori di  $AH$  è soddisfatta la relazione  $HP > 2AH$ .

$$\left[ \sqrt{-x^2 + 2x} > 2x; 0 < x < \frac{2}{5} \right]$$

- 13 È data una semicirconferenza  $\Gamma$  di diametro  $AB = 2$ , indicare con  $P$  un punto di  $\Gamma$  e  $H$  la proiezione di  $P$  su  $AB$ . Determinare per quali valori  $x$  di  $AH$  è soddisfatta la relazione  $AP < HB$ .

$$\left[ \sqrt{2x} < 2 - x; 0 \leq x < 3 - \sqrt{5} \right]$$

- 14 Un triangolo isoscele  $ABC$  di base  $AB$  è inscritto in una circonferenza di raggio 1. Determinare quali valori  $x$  può assumere l'altezza per mantenersi maggiore del doppio della base.

$$\left[ \sqrt{-x^2 + 2x} < \frac{x}{4}; \frac{32}{17} < x \leq 2 \right]$$