ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali x, y:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{a},$$

dove a è un parametro reale positivo.

a) Esprimere y in funzione di x e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).

b) Determinare per quali valori di a la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta t di equazione

$$x+y=4.$$

c) Scrivere l'equazione della circonferenza k che ha il centro nel punto di coordinate (1; 1) e intercetta sulla retta t una corda di lunghezza $2\sqrt{2}$.

d) Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla retta t.

e) Determinare per quale valore del parametro a il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza k.

PROBLEMA 2

Considerato un qualunque triangolo ABC, siano D ed E due punti interni al lato BC tali che:

$$\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}.$$

Siano poi M ed N i punti medi rispettivamente dei segmenti AD ed AE.

a) Dimostrare che il quadrilatero $DENM$ è la quarta parte del triangolo ABC.

b) Ammesso che l'area del quadrilatero $DENM$ sia $\frac{45}{2}a^2$, dove a è una lunghezza assegnata, e ammesso che l'angolo $A\hat{B}C$ sia acuto e si abbia inoltre: $\overline{AB}=13a$, $\overline{BC}=15a$, verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.

c) Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta BC e passante per i punti M, N, C.

d) Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo ADC.

QUESTIONARIO

1 Indicata con $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, si sa che $f(x) \to l$ per $x \to a$, essendo l ed a numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che $f(a) = l$ e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che $f(0) = 2$.
Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(x)\, dt}{2xe^x},$$

dove e è la base dei logaritmi naturali.

3 Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD' in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'D'C'$. Sia E il punto medio dello spigolo AB. I piani ACC' e $D'DE$ dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

4 Un tronco di piramide ha basi di aree B e b ed altezza h. Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume V è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bd}).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo $[a, b]$ e tale che, per ogni x di tale intervallo, risulti $f'(x) = 0$. Dimostrare che $f(x)$ è costante in quell'intervallo.

6 Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove n, k sono numeri naturali qualsiasi, con $n > k > 0$.

7 Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:
A) area massima e perimetro massimo;
B) area massima e perimetro minimo;
C) area minima e perimetro massimo;
D) area minima e perimetro minimo.
Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8 Considerata la funzione:

$$f(x) = ax^3 + 2ax^2 - 3x,$$

dove a è un parametro reale non nullo, determinare i valori di a per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9 Il limite della funzione $\frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{x}$, quando x tende a $+\infty$,

A) è uguale a 0;

B) è uguale ad 1;

C) è un valore diverso dai due precedenti;

D) non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10 Si consideri la funzione $\frac{x + \operatorname{sen} x}{x - \cos x}$. Stabilire se si può calcolarne il limite per $x \to +\infty$ e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hospital.

Durata massima della prova: 6 ore

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2001
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x-2m| + m},$$

dove m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.

b) Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad $m = 1$, studiarla e disegnarla in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.

c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

PROBLEMA 2

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è $24a^2$, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma con il piano della base ABC un angolo φ tale che sen $\varphi = \frac{12}{13}$.

a) Calcolare l'altezza della piramide.

b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}a$, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.

c) Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.

d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale?

QUESTIONARIO

1 Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, si prendano in esame le due seguenti proposizioni:

A: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia definita in un punto a è che sia continua in a.
B: condizione necessaria e sufficiente affinché $f(x)$ sia continua in un punto a è che sia derivabile in a.

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta.

A A vera - B vera B A vera - B falsa C A falsa - B vera D A falsa - B falsa

2 Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati $ABCD$ e $A'B'C'D'$. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani $D'DE$ e $C'CF$ dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3 Calcolare se esiste un numero naturale n per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 1\,048\,576.$$

4 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che: $f(0) = 1$ ed $f'(0) = 2$. Calcolare:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5 Dimostrare che la derivata, rispetto a x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

6 Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7 Una primitiva della funzione $f(x)$ è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8 In un piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a; b]$ relativo alla funzione $f(x)$, continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

9 Calcolare la derivata della funzione sen $2x$ rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

10 Considerata una funzione reale di variabile reale $f(x)$, derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione $f(x)$ abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

A necessaria e sufficiente. B necessaria ma non sufficiente. C sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione ordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva k di equazione $y = f(x)$, dove è:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{x^3+2}.$$

a) Determinare per quali valori di x essa è situata nel semipiano $y > 0$ e per quali nel semipiano $y < 0$.

b) Trovare l'equazione della parabola passante per l'origine O degli assi e avente l'asse di simmetria parallelo all'asse y, sapendo che essa incide ortogonalmente la curva k nel punto di ascissa -1 (*N.B.: si dice che una curva incide ortogonalmente un'altra in un punto se le rette tangenti alle due curve in quel punto sono perpendicolari*).

c) Stabilire se la retta tangente alla curva k nel punto di ascissa -1 ha in comune con k altri punti oltre a quello di tangenza.

d) Determinare in quanti punti la curva k ha per tangente una retta parallela all'asse x.

e) Enunciare il teorema di Lagrange e dire se sono soddisfatte le condizioni perché esso si possa applicare alla funzione $f(x)$ assegnata, relativamente all'intervallo $-\sqrt{2} \leq x \leq 0$.

PROBLEMA 2

Si considerino le lunghezze seguenti:

[1] $a + 2x,\ a - x,\ 2a - x,$

dove a è una lunghezza nota non nulla ed x è una lunghezza incognita.

a) Determinare per quali valori di x le lunghezze [1] si possono considerare quelle dei lati di un triangolo non degenere.

b) Stabilire se, fra i triangoli non degeneri i cui lati hanno le lunghezze [1], ne esiste uno di area massima o minima.

c) Verificato che per $x = \frac{a}{4}$ le [1] rappresentano le lunghezze dei lati di un triangolo, descriverne la costruzione geometrica con riga e compasso e stabilire se si tratta di un triangolo rettangolo, acutangolo o ottusangolo.

d) Indicato con ABC il triangolo di cui al precedente punto c, in modo che BC sia il lato maggiore, si conduca per A la retta perpendicolare al piano del triangolo e si prenda su di essa un punto D tale che AD sia lungo a: calcolare un valore approssimato a meno di un grado (sessagesimale) dell'ampiezza dell'angolo formato dai due piani DBC e ABC.

QUESTIONARIO

1 Il rapporto fra la base maggiore e la base minore di un trapezio isoscele è 4. Stabilire, fornendone ampia spiegazione, se si può determinare il valore del rapporto tra i volumi dei solidi ottenuti facendo ruotare il trapezio di un giro completo dapprima intorno alla base maggiore e poi intorno alla base minore o se i dati a disposizione sono insufficienti.

2 Due tetraedri regolari hanno rispettivamente aree totali A' e A'' e volumi V' e V''. Si sa che $\frac{A'}{A''} = 2$. Calcolare il valore del rapporto $\frac{V'}{V''}$.

3 Considerati i numeri reali a, b, c, d – comunque scelti – se $a > b$ e $c > d$ allora:

A $a + d > b + c$;

B $a - d > b - c$;

C $ad > bc$;

D $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e motivare esaurientemente la risposta.

4 Si consideri la seguente proposizione: "La media aritmetica di due numeri reali positivi, comunque scelti, è maggiore della loro media geometrica". Dire se è vera o falsa e motivare esaurientemente la risposta.

5 Determinare, se esistono, i numeri a, b in modo che la seguente relazione:

$$\frac{1}{x^2 - 2x - 3} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 1}$$

sia un'identità.

6 Si consideri la funzione:

$$f(x) = (2x - 1)^7(4 - 2x)^5.$$

Stabilire se ammette massimo o minimo assoluti nell'intervallo $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$.

7 Calcolare la derivata, rispetto ad x, della funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_x^{x+1} \ln t dt, \text{ con } x > 0.$$

8 La funzione reale di variabile reale è continua nell'intervallo chiuso e limitato [1; 3] e derivabile nell'intervallo aperto]1, 3[. Si sa che $f(1) = 1$ e inoltre $0 \leq f'(x) \leq 2$ per ogni x dell'intervallo]1; 3[. Spiegare in maniera esauriente perché risulta $1 \leq f(3) \leq 5$.

9 In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$y = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}.$$

Tale luogo è costituito da:

A un punto;

B due punti;

C infiniti punti;

D nessun punto.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10 La funzione reale di variabile reale $f(x)$, continua per ogni x, è tale che:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = a, \quad \int_0^6 f(x)\,dx = b,$$

dove a, b sono numeri reali.
Determinare, se esistono, i valori a, b per cui risulta:

$$\int_0^3 f(2x)\,dx = \ln 2 \quad \text{e} \quad \int_1^3 f(2x)\,dx = \ln 4.$$

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Se il polinomio $f(x)$ si divide per $x^2 - 1$ si ottiene x come quoziente e x come resto.

a) Determinare $f(x)$.

b) Studiare la funzione

$$y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$$

e disegnarne il grafico G in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, in particolare, i suoi punti di massimo, minimo e flesso e i suoi asintoti.

c) Trovare l'equazione della retta t tangente a G nel suo punto di ascissa $\frac{1}{2}$.

d) Determinare le coordinate dei punti comuni alla retta t e alla curva G.

e) Dopo aver determinato i numeri a, b tali che sussista l'identità:

$$\frac{x}{x^2 - 1} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1},$$

calcolare una primitiva della funzione $y = \frac{f(x)}{x^2 - 1}$.

PROBLEMA 2

Una piramide di vertice V, avente per base il trapezio rettangolo $ABCD$, è tale che:

– il trapezio di base è circoscritto a un semicerchio avente come diametro il lato AB perpendicolare alle basi del trapezio;

– lo spigolo VA è perpendicolare al piano di base della piramide;

– la faccia VBC della piramide forma un angolo di 45° con il piano della base.

a) Indicato con E il punto medio del segmento AB, dimostrare che il triangolo CED è rettangolo.

b) Sapendo che l'altezza della piramide è lunga $2a$, dove a è una lunghezza assegnata, e che $BC = 2AD$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio $ABCD$.

c) Determinare quindi l'altezza del prisma retto avente volume massimo, inscritto nella piramide in modo che una sua base sia contenuta nella base $ABCD$ della piramide.

d) Stabilire se tale prisma ha anche la massima area laterale.

QUESTIONARIO

1 Si consideri la seguente equazione in x, y:

$2x^2 + 2y^2 + x + y + k = 0$,

dove k è un parametro reale. La sua rappresentazione in un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali:

A è una circonferenza per ogni valore di k.

B è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{2}$.

C è una circonferenza solo per $k < \frac{1}{4}$.

D non è una circonferenza qualunque sia k.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e giustificare la risposta.

2 Considerata la funzione di variabile reale: $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$, dire se esiste il limite di $f(x)$ per x tendente a 1 e giustificare la risposta.

3 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale. Si sa che: $f(x)$ è derivabile su tutto l'asse reale; $f(x) = 0$ solo per $x = 0$; $f(x) \to 0$ per $x \to \pm\infty$; $f'(x) = 0$ soltanto per $x = -2$ e $x = 1$; $f(-2) = 1$ ed $f(1) = -2$. Dire, dandone esauriente spiegazione, se le informazioni suddette sono sufficienti per determinare gli intervalli in cui la funzione è definita, quelli in cui è continua, quelli in cui è positiva, quelli in cui è negativa, quelli in cui cresce, quelli in cui decresce. Si può dire qualcosa circa i flessi di $f(x)$?

4 Sia $f(x)$ una funzione di variabile reale definita nel modo seguente:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\operatorname{sen} 2x & \text{per } 0 < x < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{1+a}{\operatorname{sen} x} & \text{per } -\dfrac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

dove a è un parametro reale non nullo. Stabilire se esiste un valore di a per il quale il dominio della funzione possa essere prolungato anche nel punto $x = 0$.

5 Un titolo di borsa ha perso ieri l'x % del suo valore. Oggi quel titolo, guadagnando l'y %, è ritornato al valore che aveva ieri prima della perdita. Esprimere y in funzione di x.

6 Come si sa, la condizione che la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua in un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ è sufficiente per concludere che $f(x)$ è integrabile su $[a; b]$. Fornire due esempi, non concettualmente equivalenti, che dimostrino come la condizione non sia necessaria.

7 Una primitiva della funzione $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{2x+4}$ è:

A $\ln \dfrac{x}{x+2}$. B $\ln \dfrac{x+2}{x}$. C $\ln \sqrt{x^2 + 2x}$. D $\ln \sqrt{2x^2 + x}$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

8 S_n rappresenta la somma dei primi n numeri naturali dispari. La successione di termine generale a_n tale che $a_n = \frac{S_n}{2n^2}$, è:

A costante. B crescente. C decrescente.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire una spiegazione della scelta operata.

9 Dato un tetraedro regolare, si consideri il quadrilatero avente per vertici i punti medi degli spigoli di due facce. Dimostrare che si tratta di un quadrato.

10 Di due rette a, b – assegnate nello spazio ordinario – si sa soltanto che entrambe sono perpendicolari a una stessa retta p.

a) È possibile che le rette a, b siano parallele?

b) È possibile che le rette a, b siano ortogonali?

c) Le rette a, b sono comunque parallele?

d) Le rette a, b sono comunque ortogonali?

Per ciascuna delle quattro domande motivare la relativa risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2002
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Con riferimento a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a) scrivere l'equazione della circonferenza k con centro nel punto (8; 2) e raggio 6 e calcolare le coordinate dei punti M ed N in cui la bisettrice b del 1° e 3° quadrante interseca la curva;

b) scrivere l'equazione della parabola p avente l'asse parallelo all'asse delle ordinate, tangente all'asse delle ascisse in un punto del semipiano $x > 0$ e passante per i punti M ed N;

c) calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla parabola p e dalla bisettrice b;

d) dopo aver stabilito che la circonferenza k e la parabola p non hanno altri punti in comune oltre ad M ed N, calcolare le aree delle regioni in cui il cerchio delimitato da k è diviso dalla parabola.

PROBLEMA 2

Con riferimento a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy):

a) studiare le funzioni:

$$y = \frac{-2x^3 + 6x^2}{3}, \qquad y = \frac{x^3 - 6x^2 + 12x}{3}$$

e disegnare i loro grafici;

b) dopo aver verificato che, oltre al punto O, tali grafici hanno in comune un altro punto A, determinare sul segmento OA un punto P tale che, condotta per esso la retta parallela all'asse y, sia massima la lunghezza del segmento RS, dove R ed S sono i punti in cui la retta interseca i due grafici suddetti;

c) determinare le coordinate dei punti di ascisse uguali in cui le due curve hanno tangenti parallele e verificare che, oltre al punto A, si ritrovano i punti R ed S;

d) calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalle due curve.

QUESTIONARIO

1 Sia D il dominio di una funzione reale di variabile reale $f(x)$ e sia x_0 un elemento di D: definire la continuità e la discontinuità di $f(x)$ in x_0 e fornire un'interpretazione geometrica delle definizioni date.

2 In un piano è assegnata una parabola p. Tracciata la tangente t a essa nel suo vertice, chiamati M ed N due punti di p simmetrici rispetto al suo asse e indicate con M' ed N' rispettivamente le proiezioni ortogonali di M ed N sulla retta t, determinare il rapporto fra l'area della regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta MN e quella del rettangolo $MNN'M'$, fornendo una esauriente dimostrazione.

3 Si consideri un cono circolare retto ottenuto dalla rotazione di un triangolo isoscele intorno all'altezza propriamente detta. Sapendo che il perimetro del triangolo è costante, stabilire quale rapporto deve sussistere fra il lato del triangolo e la sua base affinché il cono abbia volume massimo.

4 In un riferimento monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) è assegnata l'iperbole di equazione $y = \frac{1}{x}$. Considerati su di essa i punti A e B di ascisse rispettivamente a e $\frac{1}{a}$, con $a \neq 0$, si traccino le tangenti all'iperbole in A e B. Calcolare l'area della regione piana delimitata dall'iperbole e dalle tangenti considerate.

5 Dimostrare che la derivata della funzione $\log_a x$ è la funzione $\frac{1}{x}\log_a e$, dove e è la base dei logaritmi naturali.

6 Considerata l'equazione $x^2 + kx + k = 0$, calcolare il limite di ciascuna delle sue radici per $k \to +\infty$.

7 Dopo aver definito il limite destro e il limite sinistro di una funzione in un punto, ricorrere a tali definizioni per verificare che risulta:

$$\lim_{x \to 0^-}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) = -1, \lim_{x \to 0^+}\left(x + \frac{x}{|x|}\right) = 1.$$

8 Dimostrare che le curve di equazione $y = x^2 + kx + k$, assegnate in un riferimento cartesiano, passano tutte per uno stesso punto.

9 Considerati i 90 numeri del gioco del Lotto, calcolare quante sono le cinquine che, in una data estrazione, realizzano un determinato terno.

10 Dimostrare la formula che esprime il numero delle combinazioni semplici di n oggetti presi a k a k in funzione del numero delle disposizioni semplici degli stessi oggetti presi a k a k e delle permutazioni semplici su k oggetti.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si consideri un tetraedro regolare T di vertici A, B, C, D.

a) Indicati rispettivamente con V ed S il volume e l'area totale di T e con r il raggio della sfera inscritta in T, trovare una relazione che leghi V, S ed r.

b) Considerato il tetraedro regolare T' avente per vertici i centri delle facce di T, calcolare il rapporto fra le lunghezze degli spigoli di T e T' e il rapporto fra i volumi di T e T'.

c) Condotto il piano α, contenente la retta AB e perpendicolare alla retta CD nel punto E, e posto che uno spigolo di T sia lungo s, calcolare la distanza di E dalla retta AB.

d) Considerata nel piano α la parabola p avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B ed E, riferire questo piano ad un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali e trovare l'equazione di p.

e) Determinare per quale valore di s la regione piana delimitata dalla parabola p e dalla retta EA ha area $\frac{\sqrt{2}}{3}\,\text{cm}^2$.

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+m+|m|}$, dove m è un parametro reale.

a) Determinare il suo dominio di derivabilità.

b) Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x=1$.

c) Studiare la funzione $f(x)$ corrispondente al valore di m così trovato e disegnarne il grafico γ in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver stabilito quanti sono esattamente i flessi di γ ed aver fornito una spiegazione esauriente di ciò.

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dal grafico γ, dall'asse x e dalla retta di equazione $x=1$.

QUESTIONARIO

1 Dopo aver fornito la definizione di "rette sghembe", si consideri la seguente proposizione: «Comunque si prendano nello spazio tre rette x, y, z, due a due distinte, se x ed y sono sghembe e, così pure, se sono sghembe y e z allora anche x e z sono sghembe». Dire se è vera o falsa e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2 Un piano interseca tutti gli spigoli laterali di una piramide quadrangolare regolare: descrivere le caratteristiche dei possibili quadrilateri sezione a seconda della posizione del piano rispetto alla piramide.

3 Dal punto A, al quale è possibile accedere, è visibile il punto B, al quale però non si può accedere in alcun modo, così da impedire una misura diretta della distanza $\overline{AB}$. Dal punto A si può però accedere al punto P, dal quale, oltre ad A, è visibile B in modo che, pur rimanendo impossibile misurare direttamente la distanza $\overline{PB}$, è tuttavia possibile misurare la distanza $\overline{AP}$. Disponendo degli strumenti di misura necessari e sapendo che P non è allineato con A e B, spiegare come si può utilizzare il teorema dei seni per calcolare la distanza $\overline{AB}$.

4 Il dominio della funzione $f(x) = \ln\{\sqrt{x+1} - (x-1)\}$ è l'insieme degli x reali tali che:

A) $-1 < x \leq 3$; B) $-1 \leq x < 3$; C) $0 < x \leq 3$; D) $0 \leq x < 3$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta effettuata.

5 La funzione $2x^3 - 3x^2 + 2$ ha un solo zero reale, vale a dire che il suo grafico interseca una sola volta l'asse delle ascisse. Fornire un'esauriente dimostrazione di questo fatto e stabilire se lo zero della funzione è positivo o negativo.

6 La derivata della funzione $f(x) = \int_0^{x^2} e^{-t^2}\,dt$ è la funzione $f'(x) = 2xe^{-x^4}$. Eseguire tutti i passaggi necessari a giustificare l'affermazione.

7 Considerati i primi n numeri naturali a partire da 1:

$1, 2, 3, \ldots, n-1, n,$

moltiplicarli combinandoli due a due in tutti i modi possibili. La somma dei prodotti ottenuti risulta uguale a:

A) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$; B) $\frac{1}{3}n(n^2-1)$; C) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$; D) $\frac{1}{24}n(n^2-1)(3n+2)$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una esauriente spiegazione della scelta operata.

8 x ed y sono due numeri naturali dispari tali che $x - y = 2$. Il numero $x^3 - y^3$:

A) è divisibile per 2 e per 3.

B) è divisibile per 2 ma non per 3.

C) è divisibile per 3 ma non per 2.

D) non è divisibile né per 2 né per 3.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

9 Si consideri una data estrazione in una determinata Ruota del Lotto. Calcolare quante sono le possibili cinquine che contengono i numeri 1 e 90.

10 Il valore dell'espressione $\log_2 3 \cdot \log_3 2$ è 1. Dire se questa affermazione è vera o falsa e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Del triangolo ABC si hanno le seguenti informazioni:

$AB = 3$ cm; $AC = 2$ cm; $C\hat{A}B = 60°$.

Si tracci la bisettrice di $C\hat{A}B$ e se ne indichi con D l'intersezione con il lato BC.

a) Si calcoli la lunghezza del lato BC e delle parti in cui esso risulta diviso dal punto D.
b) Si determinino il coseno dell'angolo in B, la misura di AD e, disponendo di un calcolatore, le misure approssimate degli altri due angoli interni di vertici B e C.
c) Si trovi sul lato AD, internamente a esso, un punto P tale che la somma s dei quadrati delle sue distanze dai vertici A, B e C sia m^2 essendo m un parametro reale dato.
d) Si discuta tale ultima questione rispetto al parametro m.

PROBLEMA 2

È data una piramide retta a base quadrata.

a) Si sezioni la piramide con un piano parallelo alla base e si indichino con a, b ($a > b$) e h rispettivamente le misure degli spigoli delle basi e l'altezza del tronco che ne risulta. Si esprima in funzione di a, b, h il volume del tronco di piramide illustrando il ragionamento seguito.
b) Si calcoli il volume massimo della piramide data sapendo che la sua superficie laterale è $\sqrt{3}$ dm^2.
c) Si calcoli il raggio della sfera circoscritta alla piramide massima trovata.
d) Si dia una approssimazione della capacità in litri di tale sfera.

QUESTIONARIO

1 Tra i rettangoli aventi la stessa area di 16 m^2 trovare quello di perimetro minimo.

2 Cosa si intende per «funzione periodica»? Qual è il periodo della funzione $f(x) = \operatorname{sen} x - 2\cos x$?

3 Dare un esempio di un solido la cui superficie laterale è 24π.

4 Provare che se l'equazione $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ha due soluzioni entrambe di valore k, allora k è anche soluzione dell'equazione $y' = 0$ avendo posto $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. A quale condizione k è anche soluzione di $y'' = 0$?

5 Dare una giustificazione delle formule:

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$
$\cos 2\alpha = 1 - 2\,\text{sen}^2\alpha$

e utilizzarle per provare che:

$\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1.$

6 Dimostrare che l'equazione $x^5 + 10x + 1 = 0$ ammette una sola soluzione reale.

7 Enunciare il teorema del valor medio o di Lagrange [da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813)] e mostrarne le implicazioni ai fini della determinazione della crescenza o decrescenza delle curve.

8 Di una funzione $f(x)$ si sa che la sua derivata seconda è 2^x e si sa ancora che:

$f(0) = \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$ e $f'(0) = 0$.

Qual è $f(x)$?

9 Calcolare l'area della parte finita di piano delimitata dalla curva d'equazione $y = 2e^x - 1$ e dagli assi cartesiani.

10 Definire gli asintoti – orizzontale, obliquo, verticale – di una curva e fornire un esempio di funzione $f(x)$ il cui grafico presenti un asintoto orizzontale e due asintoti verticali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2003
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È assegnata la seguente equazione in x:

$$x^3 + 2x - 50 = 0.$$

a) Dimostrare che ammette una e una sola soluzione $\overline{x}$ nel campo reale.
b) Determinare il numero intero z tale che risulti: $z < \overline{x} < z + 1$.
c) Dopo aver riferito il piano a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), determinare, se esistono, i valori del parametro reale k ($k \neq -1$) per cui la curva C_k di equazione:

$$y = (x^3 + 2x - 50) + k(x^3 + 2x - 75)$$

ammette un massimo e un minimo relativi.
d) Stabilire se esiste un valore $\overline{k}$ di k per cui la curva $C_{\overline{k}}$ è simmetrica rispetto all'origine O.
e) Stabilire se fra le rette di equazione $y = 5x + m$, dove m è un parametro reale, ve ne sono di tangenti alla curva C_0 ottenuta per $k = 0$.

PROBLEMA 2

La base minore, la base maggiore e il perimetro di un trapezio isoscele misurano nell'ordine:

$$6 \text{ cm}, \ 10 \text{ cm}, \ 4(4 + \sqrt{5}) \text{ cm}.$$

a) Dire, giustificando la risposta, se il trapezio è circoscrittibile a una circonferenza.
b) Spiegare perché il trapezio è inscrittibile in una circonferenza k.
c) Dopo aver riferito il piano del trapezio a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, trovare l'equazione di k.
d) Trovare l'equazione della parabola p passante per gli estremi della base minore del trapezio e avente l'asse perpendicolare a tale base e il vertice nel centro di k.
e) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il trapezio.
f) Calcolare le aree delle regioni piane in cui la parabola p divide il cerchio delimitato da k.

QUESTIONARIO

1 Nell'insieme delle rette dello spazio si consideri la relazione così definita: «due rette si dicono parallele se sono complanari e non hanno punti comuni». Dire se è vero o falso che gode della proprietà transitiva e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

2 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnato il luogo geometrico dei punti che soddisfano alla seguente equazione:

$$8x^2 + 8y^2 - 4kx + 8y - 3k = 0,$$

dove k è un parametro reale. Calcolare per quali valori di k il luogo è costituito da:

1) un punto; 2) due punti; 3) infiniti punti; 4) nessun punto.

3 Dimostrare che condizione necessaria e sufficiente affinché un trapezio rettangolo abbia le diagonali perpendicolari è che le misure della base minore, dell'altezza e della base maggiore, prese nell'ordine e considerate rispetto alla stessa unità di misura, siano numeri in progressione geometrica.

4 Dire se è vero che risulta: $\sqrt{x^2 + 2x\sqrt{3} + 3} = x + \sqrt{3}$ per ogni x reale e giustificare la risposta.

5 Si consideri la funzione polinomiale in x:

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n.$$

Dimostrare che il suo grafico, rappresentato in un piano cartesiano, ha come tangente nel punto di ascissa 0 la retta di equazione $y = a_0 + a_1 x$.

6 Si consideri la successione di termine generale a_n tale che:

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ a_{n-1} + n & \text{se } n > 1 \end{cases}.$$

Calcolare a_{100}.

7 Considerata la successione di termine generale:

$$a_n = \frac{2}{3^n},$$

calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

8 Considerata la funzione $f(x)$ tale che:

$$f(x) = \int_0^x (1 - \ln t)\, dt, \quad \text{con } x > 0,$$

determinare i suoi zeri e gli intervalli in cui cresce o decresce.

9 Come si sa, la parte di sfera compresa fra due piani paralleli che la secano si chiama *segmento sferico a due basi*. Indicati con r_1 ed r_2 i raggi delle due basi del segmento sferico e con h la sua altezza (distanza tra le basi), dimostrare che il volume V del segmento sferico considerato è dato dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{6}\pi h(h^2 + 3r_1^2 + 3r_2^2).$$

Qualunque sia il metodo seguito per la dimostrazione, esplicitare ciò che si ammette.

10 Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x (1 - e^{-t})dt}{\text{sen}^2 x}$$

essendo e la base dei logaritmi naturali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sia f la funzione definita da: $f(x) = 2x - 3x^3$

1. Disegnate il grafico G di f.
2. Nel primo quadrante degli assi cartesiani, considerate la retta $y = c$ che interseca G in due punti distinti e le regioni finite di piano R e S che essa delimita con G. Precisamente: R delimitata dall'asse y, da G e dalla retta $y = c$ e S delimitata da G e dalla retta $y = c$.
3. Determinate c in modo che R e S siano equivalenti e determinate le corrispondenti ascisse dei punti di intersezione di G con la retta $y = c$.
4. Determinate la funzione g il cui grafico è simmetrico di G rispetto alla retta $y = \frac{4}{9}$.

PROBLEMA 2

ABC è un triangolo rettangolo di ipotenusa BC.

1. Dimostrate che la mediana relativa a BC è congruente alla metà di BC.
2. Esprimete le misure dei cateti di ABC in funzione delle misure, supposte assegnate, dell'ipotenusa e dell'altezza ad essa relativa.
3. Con $BC = \sqrt{3}$ *metri*, determinate il cono K di volume massimo che si può ottenere dalla rotazione completa del triangolo attorno ad uno dei suoi cateti e la capacità in *litri* di K.
4. Determinate la misura approssimata, in radianti ed in gradi sessagesimali, dell'angolo del settore circolare che risulta dallo sviluppo piano della superficie laterale del cono K.

QUESTIONARIO

1 Trovate due numeri reali a e b, $a \neq b$, che hanno somma e prodotto uguali.

2 Provate che la superficie totale di un cilindro equilatero sta alla superficie della sfera ad esso circoscritta come 3 sta a 4.

3 Date un esempio di funzione $f(x)$ con un massimo relativo in $(1, 3)$ e un minimo relativo in $(-1, 2)$.

4 Dimostrate che l'equazione $e^x + 3x = 0$ ammette una e una sola soluzione reale.

5 Di una funzione $g(x)$, non costante, si sa che: $\lim_{x \to 2} g(x) = 3$ e $g(2) = 4$. Trovate una espressione di $g(x)$.

6 Verificate che le due funzioni $f(x) = 3\log x$ e $g(x) = \log(2x)^3$ hanno la stessa derivata. Quale giustificazione ne date?

7 Un triangolo ha due lati e l'angolo da essi compreso che misurano rispettivamente a, b e γ. Quale è il valore di γ che massimizza l'area del triangolo?

8 La misura degli angoli viene fatta adottando una opportuna unità di misura. Le più comuni sono i gradi *sessagesimali*, i *radianti*, i gradi *centesimali*. Quali ne sono le definizioni?

9 Calcolate: $\int_0^1 \operatorname{arcsen} x \, dx$.

10 Considerate gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{a, b, c\}$; quante sono le applicazioni (le funzioni) di A in B?

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), è assegnata la curva K di equazione:

(1) $$y=\frac{2x(6-x)}{2+x}.$$

a) Disegnarne l'andamento, indicando con A il suo punto di massimo relativo.
b) Calcolare quanti punti, aventi le coordinate del tipo $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, dove a, b sono numeri interi, appartengono alla regione piana (contorno compreso) delimitata dall'asse x e dalla curva K.
c) Fra i triangoli isosceli aventi il vertice propriamente detto in A e la base sull'asse x, determinare quello il cui perimetro è 16.
d) Calcolare le aree delle due regioni in cui la curva K divide il triangolo trovato sopra.
e) Spiegare perché la funzione (1) non è invertibile nel suo dominio. Se si restringe convenientemente questo dominio si ottiene una funzione invertibile? Qual è in tal caso la funzione inversa?

PROBLEMA 2

Una piramide ha per base il quadrato $ABCD$ di lato lungo 7 cm. Anche l'altezza VH della piramide è lunga 7 cm e il suo piede H è il punto medio del lato AB. Condurre per la retta AB il piano α che formi con il piano della base della piramide un angolo φ tale che $\cos\varphi=\frac{3}{5}$ e indicare con EF la corda che il piano α intercetta sulla faccia VCD della piramide.

a) Spiegare perché il quadrilatero convesso $ABEF$ è inscrivibile in una circonferenza γ.
b) Tale quadrilatero è anche circoscrivibile a una circonferenza?
c) Calcolare i volumi delle due parti in cui la piramide data è divisa dal piano α.
d) Dopo aver riferito il piano α a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy), determinare l'equazione della circonferenza γ.

QUESTIONARIO

1 La funzione $f(x)=\frac{3x-2\operatorname{sen}x}{2x-3\operatorname{sen}x}$ è, per $x\to+\infty$, una forma indeterminata di tipo $\frac{\infty}{\infty}$. Il limite della funzione, per $x\to+\infty$:

A) non esiste; B) è $\frac{3}{2}$; C) è $\frac{2}{3}$; D) è un valore diverso da $\frac{3}{2}$ e $\frac{2}{3}$.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

2 Determinare il più grande valore di n per cui l'espressione numerica $\sum_{k=5}^{n} k$ non supera 10 000.

3 Sia $F(x)$ una funzione reale di variabile reale derivabile in un punto a. Si sa che se $F'(a) > 0$ allora $F(x)$ è crescente in a, mentre se $F'(a) < 0$ allora $F(x)$ è decrescente in a. Dimostrare che condizione sufficiente ma non necessaria affinché $F(x)$ ammetta in a un massimo relativo è che risulti $F'(a) = 0$ ed $F''(a) < 0$.

4 Risolvere la seguente disequazione in x:

$$(\ln x)^2 \geq \ln(x^2).$$

5 Considerato un triangolo equilatero di altezza h e detto P un suo qualsiasi punto interno, indicare con x, y, z le distanze di P dai lati del triangolo. La somma $x + y + z$ risulta:

A) sempre maggiore di h;
B) sempre minore di h;
C) sempre uguale ad h;
D) a volte maggiore di h, a volte minore, a volte uguale.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta effettuata.

6 Riferito il piano ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), si consideri l'equazione:

$$xy + px + qy + r = 0.$$

Determinare sotto quali condizioni per i coefficienti p, q, r (non tutti nulli) essa rappresenta l'insieme di due rette.

7 Il quadrilatero Q'' avente per vertici i punti medi dei lati di un quadrilatero convesso Q' è un quadrato. Dire quali sono le caratteristiche del quadrilatero Q' e darne esauriente dimostrazione.

8 Sia $f(x)$ una funzione reale di variabile reale continua su tutto l'asse reale. Si conosce il valore dell'integrale $\int_0^3 f(x)\,dx$. È allora possibile calcolare:

A) $\int_0^3 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$; B) $\int_0^3 f(3x)\,dx$; C) $\int_0^1 f\left(\frac{x}{3}\right) dx$; D) $\int_0^1 f(3x)\,dx$.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

9 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(2x - \sqrt{4x-1})$.

10 Di triangoli non congruenti, di cui un lato è lungo 10 cm e i due angoli interni adiacenti ad esso, α e β, sono tali che sen $\alpha = \frac{3}{5}$ e sen $\beta = \frac{24}{25}$, ne esistono:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3.

Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

Durata massima della prova: 6 ore
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2004
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi a 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

In un piano è assegnata la parabola p di vertice V e fuoco F tali che, rispetto a una assegnata unità di lunghezza, il segmento VF sia lungo $\frac{1}{2}$. Indicato con E il punto simmetrico di F rispetto a V e riferito il piano a un conveniente sistema di assi cartesiani (Oxy):

a) determinare l'equazione della parabola p e stabilire se esiste un punto A di p tale che il triangolo AEF sia rettangolo in A;
b) chiamato P un generico punto della parabola p, trovare le coordinate del baricentro G del triangolo PEF e determinare l'equazione del luogo geometrico k descritto dal punto G al variare di P su p;
c) indicati con R ed S due punti appartenenti il primo alla parabola p e il secondo al luogo k e situati nel 1° quadrante su una retta r perpendicolare all'asse di simmetria della parabola p, calcolare a quale distanza da V bisogna condurre la retta r affinché l'area della regione finita di piano delimitata dal segmento RS, dall'arco VR della parabola p e dall'arco VS del luogo k sia uguale a $\frac{8}{9}(3-\sqrt{3})$;
d) stabilire se la distanza trovata sopra è espressa da un numero razionale o irrazionale.

PROBLEMA 2

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x},$$

dove a è un parametro reale.

a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π, che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.
b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \le x \le \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

QUESTIONARIO

1 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce consecutive di un ottaedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al secondo.

2 Dimostrare che, se due piani sono perpendicolari, ogni retta perpendicolare a uno di essi è parallela all'altro o è contenuta in esso.
Si può concludere che ogni retta parallela a uno dei due piani è perpendicolare all'altro? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

3 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \ln(1 - 2x + \sqrt{x})$.

4 Il limite di tg$x$ per x tendente a $+\infty$:
A) è $+\infty$;
B) è $\frac{\pi}{2}$;
C) non esiste;
D) esiste ma non si riesce a calcolare.

Una sola risposta è corretta: individuarla e fornire una spiegazione esauriente della scelta operata.

5 Dimostrare il seguente teorema: «Condizione sufficiente ma non necessaria affinché la funzione reale di variabile reale $f(x)$ sia continua nel punto a è che sia derivabile in a».

6 Utilizzando il calcolo integrale, dimostrare la formula che fornisce il volume di una sfera di raggio assegnato.

7 Indicata con S_n la somma di n termini in progressione geometrica, di primo termine $\frac{1}{2}$ e ragione $\frac{1}{2}$, calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$.

8 Calcolare il valore della seguente somma:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots 100^2.$$

9 In una classe di 25 alunni bisogna estrarre a sorte una rappresentanza di 3 elementi. Calcolare quante sono le possibili terne di rappresentanti.

10 Alla finale dei 200 m piani partecipano 8 atleti, fra i quali figurano i nostri amici Antonio e Pietro. Calcolare il numero dei possibili ordini di arrivo che registrino i nostri due amici fra i primi tre classificati.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005

Il candidato risolva uno dei due problemi e cinque quesiti scelti nel questionario.

PROBLEMA 1

Nel primo quadrante del sistema di riferimento Oxy, ortogonale e monometrico, si consideri la regione R, finita, delimitata dagli assi coordinati e dalla parabola λ d'equazione: $y = 6 - x^2$.

1. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno all'asse y.
2. Si calcoli il volume del solido generato dalla rotazione completa di R attorno alla retta $y = 6$.
3. Si determini il valore di k per cui la retta $y = k$ dimezza l'area di R.
4. Per $0 < t < \sqrt{6}$ sia $A(t)$ l'area del triangolo delimitato dagli assi e dalla tangente a λ nel suo punto di ascissa t. Si determini $A(1)$.
5. Si determini il valore di t per il quale $A(t)$ è minima.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione f definita sull'intervallo $[0; +\infty[$ da:

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{2}x^2(3 - 2\log x) + 1 \ \text{ se } \ x > 0 \end{cases}$$

e sia C la sua curva rappresentativa nel riferimento Oxy, ortogonale e monometrico.

1. Si stabilisca se f è *continua* e *derivabile* in 0
2. Si dimostri che l'equazione $f(x) = 0$ ha, sull'intervallo $[0; +\infty[$, un'unica radice reale.
3. Si disegni C e si determini l'equazione della retta r tangente a C nel punto di ascissa $x = 1$.
4. Sia n un intero naturale non nullo. Si esprima, in funzione di n, l'area A_n del dominio piano delimitato dalla curva C, dalla retta tangente r e dalle due rette: $x = \dfrac{1}{n}$ e $x = 1$.
5. Si calcoli il limite per $n \to +\infty$ di A_n e si interpreti il risultato ottenuto.

QUESTIONARIO

1 Si dimostri che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio e si utilizzi il risultato per calcolare sen 18°, sen 36°.

2 Una bevanda viene venduta in lattine, ovvero contenitori a forma di cilindro circolare retto, realizzati con fogli di latta. Se una lattina ha la capacità di 0,4 *litri*, quali devono essere le sue dimensioni in *centimetri*, affinché sia minima la quantità di materiale necessario per realizzarla? (Si trascuri lo spessore della latta).

3 Si dimostri che la curva $y = x \operatorname{sen} x$ è tangente alla retta $y = x$ quando $\operatorname{sen} x = 1$ ed è tangente alla retta $y = -x$ quando $\operatorname{sen} x = -1$.

4 Si dimostri che tra tutti i rettangoli di dato perimetro, quello di area massima è un quadrato.

5 Il numero e di *Nepero* [nome latinizzato dello scozzese John Napier (1550-1617)]: come si definisce? Perché la derivata di e^x è e^x?

6 Come si definisce $n!$ (n fattoriale) e quale ne è il significato nel calcolo combinatorio? Quale è il suo legame con i coefficienti binomiali? Perché?

7 Se $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 3$, per quanti numeri reali k è $f(k) = 2$? Si illustri il ragionamento seguito.

8 I centri delle facce di un cubo sono i vertici di un ottaedro. È un ottaedro regolare? Quale è il rapporto tra i volumi dei due solidi?

9 Si calcoli, senza l'aiuto della calcolatrice, il valore di:

$$\operatorname{sen}^2(35°) + \operatorname{sen}^2(55°)$$

ove le misure degli angoli sono in gradi sessagesimali.

10 Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$ è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Sono dati una piramide triangolare regolare e il prisma retto inscritto in essa in modo che una base sia la sezione della piramide con il piano equidistante dal suo vertice e dalla sua base.

A) Ammesso di conoscere il volume della piramide, dire se è possibile calcolare il volume del prisma e fornire una esauriente spiegazione della risposta.

B) Posto che lo spigolo della base ABC della piramide sia lungo 4 cm:
   1) calcolare la misura dello spigolo della base MNP del prisma, complanare ad ABC;
   2) supposto che gli spigoli AB e MN siano paralleli, riferire il piano dei triangoli ABC e MNP a un sistema di assi cartesiani avente l'origine in A e l'asse delle ascisse coincidente con la retta AB e trovare le coordinate dei vertici di tali triangoli;
   3) determinare quindi l'equazione della parabola avente l'asse perpendicolare alla retta AB e passante per i punti A, B, M e verificare che passa pure per N;
   4) calcolare le aree delle parti in cui la parabola trovata divide i triangoli ABC e MNP;
   5) spiegare esaurientemente, col metodo preferito, com'è posizionata la circonferenza circoscritta al triangolo MNP rispetto al triangolo ABC.

PROBLEMA 2

È assegnata la funzione $f_a(x) = \dfrac{a}{1 + x^2}$, dove a è un parametro reale non nullo.

1) Dopo aver fornito la definizione di funzione limitata, spiegare perché la funzione $f_a(x)$ è limitata.
2) Una volta riferito il piano a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy) e indicato con A il punto di massimo del grafico G della funzione quando $a > 0$, scrivere l'equazione della circonferenza γ di diametro OA.
3) Determinare quanti e quali punti hanno in comune la circonferenza γ e la curva G, quando a varia nell'insieme dei numeri reali positivi.
4) Calcolare il valore $\overline{a}$ di a per il quale la circonferenza γ e la curva G hanno in comune i vertici di un triangolo equilatero.
5) Dopo aver controllato che il valore $\overline{a}$ sopraddetto è 4, indicare con $\overline{\gamma}$ e $\overline{G}$ la circonferenza e la curva corrispondenti a tale valore e calcolare le aree delle regioni piane in cui la curva $\overline{G}$ divide il cerchio delimitato da $\overline{\gamma}$.

QUESTIONARIO

1 È dato un trapezio rettangolo, in cui le bisettrici degli angoli adiacenti al lato obliquo si intersecano in un punto del lato perpendicolare alle basi.
Dimostrare che il triangolo avente per vertici questo punto e gli estremi del lato obliquo è rettangolo e trovare quale relazione lega il lato obliquo alle basi del trapezio.

2 Siano AB, AC, AD tre spigoli di un cubo. Sapendo che uno spigolo è lungo s, calcolare la distanza del vertice A dal piano dei punti B, C, D.

3 Alberto e Gianna sono chiamati a risolvere la seguente equazione: $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{4}$. Alberto ottiene come soluzione gli angoli x tali che: $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi$ (k intero qualsiasi); Gianna trova la seguente soluzione: $x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}$ (k intero qualsiasi).
È vero o è falso che Alberto ha risolto correttamente e Gianna no? Fornire una risposta esauriente.

4 Si consideri la seguente equazione in x:

$(k-2)x^2 - (2k-1)x + (k+1) = 0$, dove k è un parametro reale diverso da 2.

Indicate con x' e x'' le sue radici, calcolare i limiti di $x' + x''$ quando k tende a 2, a $+\infty$ e a $-\infty$.

5 Il limite della funzione $(1-x)^{\frac{1}{x}}$ per $x \to 0$:
A) è uguale a 1;
B) è uguale $+\infty$;
C) non esiste;
D) è uguale a e;
E) è uguale a $\frac{1}{e}$,

con e la base dei logaritmi naturali.
Una sola risposta è corretta. Individuarla e fornirne una spiegazione esauriente.

6 Fornire un esempio di funzione reale di variabile reale $f(x)$ avente le seguenti caratteristiche:

$f(1) = 1, \quad f'(1) = 0, \quad f''(1) < 0.$

7 In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x + my = 1$ e $mx - 2y = 2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m?

8 È vero o falso che le due funzioni $\ln(x^2 - 4)$ e $\ln(x+2) + \ln(x-2)$ hanno lo stesso grafico? Fornire una esauriente spiegazione della risposta.

9 Le parti letterali dei termini dello sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$, ordinati secondo le potenze decrescenti di a e crescenti di b, sono rispettivamente:

$a^{10},\ a^9b,\ a^8b^2,\ a^7b^3,\ a^6b^4,\ a^5b^5,\ a^4b^6,\ a^3b^7,\ a^2b^8,\ ab^9,\ b^{10}.$

Elencare i loro coefficienti e giustificare in modo esauriente la risposta.

10 Una classe è formata da 27 alunni: 15 femmine e 12 maschi. Si deve costituire una delegazione di 5 alunni, di cui 3 femmine e 2 maschi. Quante sono le possibili delegazioni?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Considerato un triangolo ABC, acutangolo e isoscele sulla base BC, si chiami D il piede della sua altezza condotta per C e si costruisca, dalla stessa parte di A rispetto a BC, il punto E in modo che il triangolo ECD sia simile ad ABC.

a) Dimostrare che:
1) EC è perpendicolare a CB;
2) i triangoli EFC e AFD – dove F è il punto comune ai segmenti ED e AC – sono simili e, di conseguenza, anche i triangoli EFA e CFD sono simili e gli angoli $A\hat{E}F$ e $F\hat{C}D$ sono congruenti;
3) EA è parallela a CB;
4) il quadrilatero $AECD$ è inscrivibile in una circonferenza.

b) Ammesso che le misure di BC e CD, rispetto a un'assegnata unità di misura, siano 6 e $\frac{24}{5}$, dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani, determinare:
1) le coordinate dei punti A, B, C, D, E;
2) l'equazione della circonferenza circoscritta al quadrilatero $AECD$.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

[1] $y = x^4 + ax^3 + bx^2 + c$.

a) Dimostrare che, nel punto in cui secano l'asse y, hanno tangente parallela all'asse x.

b) Trovare quale relazione deve sussistere fra i coefficienti a, b affinché la curva [1] volga la concavità verso le y positive in tutto il suo dominio.

c) Determinare i coefficienti a, b, c in modo che la corrispondente curva [1] abbia, nel punto in cui seca l'asse y, un flesso e la relativa tangente inflessionale la sechi ulteriormente nel punto di coordinate (2; 2).

d) Indicata con K la curva trovata, stabilire com'è situata rispetto all'asse x, fornendo una esauriente spiegazione della risposta.

e) Dopo aver verificato che la curva K presenta un secondo flesso, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da K e dalle due tangenti inflessionali.

QUESTIONARIO

1 Si considerino un tronco di piramide quadrangolare regolare, la cui base maggiore abbia area quadrupla della minore, e un piano α equidistante dalle basi del tronco. Dire se i dati sono sufficienti per calcolare il rapporto fra i volumi dei due tronchi in cui il tronco dato è diviso dal piano α.

2 Sia *ABC* un qualsiasi triangolo. Sui suoi lati ed esternamente a esso si costruiscano i tre quadrati *ABDE*, *BCFG* e *CAHL*. Dimostrare, con il metodo preferito, che i triangoli *AHE*, *BDG* e *CFL* sono equivalenti al triangolo *ABC*.

3 Luca e Claudia devono calcolare il valore di una certa espressione contenente logaritmi. Trovano come risultati rispettivamente: $\log_2 27 + \log_2 12$ e $2 + \log_2 81$.
Ammesso che il risultato ottenuto da Luca sia esatto, si può concludere che quello ottenuto da Claudia è sbagliato? Fornire una risposta esaurientemente motivata.

4 Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x \cos x + c\cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

5 Determinare il più grande valore dell'intero n per cui l'espressione $\sum_{k=0}^{n} 3^k$ non supera 10 000.

6 Dimostrare che il limite di $\cos x$, per x tendente a 0, è 1, esplicitando ciò che si ammette.

7 Determinare il dominio di derivabilità della funzione $f(x) = |x^2 - 1|$

8 Sia $f(x)$ una funzione continua per ogni x reale tale che $\int_0^2 f(x)dx = 4$. Dei seguenti integrali:

$$\int_0^1 f(2x)dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$$

se ne può calcolare uno solo in base alle informazioni fornite. Dire quale e spiegarne la ragione.

9 Dimostrare la seguente formula:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

dove n, k sono numeri naturali tali che $0 < k < n$. Essa spiega una delle regole sulle quali è basata la costruzione del «triangolo di Tartaglia» (da Niccolò Fontana, detto Tartaglia, 1505 ca. - 1557): enunciarla.

10 Calcolare quante sono le possibili «cinquine» che si possono estrarre da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a 90, ognuna delle quali comprenda però i tre numeri 1, 2 e 3.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Un filo metallico di lunghezza l viene utilizzato per delimitare il perimetro di un'aiuola rettangolare.
a) Qual è l'aiuola di area massima che è possibile delimitare?

Si pensa di tagliare il filo in due parti e utilizzarle per delimitare un'aiuola quadrata e un'altra circolare. Come si dovrebbe tagliare il filo affinché:
b) la somma delle due aree sia minima?
c) la somma delle due aree sia massima?

Un'aiuola, una volta realizzata, ha la forma di parallelepipedo rettangolo; una scatola, cioè, colma di terreno. Si discute di aumentare del 10% ciascuna sua dimensione. Di quanto terreno in più, in termini percentuali, si ha bisogno?

PROBLEMA 2

Si considerino le funzioni f e g determinate da $f(x) = \log x$ e $g(x) = ax^2$, essendo a un parametro reale e il logaritmo di base e.

1. Si discuta, al variare di a, l'equazione $\log x = ax^2$ e si dica, in particolare, per quale valore di a i grafici di f e g sono tra loro tangenti.

2. Si calcoli, posto $a = 1$, l'area della parte di piano delimitata dai grafici delle funzioni f e g e dalle rette $x = 1$ e $x = 2$.

3. Si studi la funzione $h(x) = \log x - ax^2$ scegliendo per a un valore numerico maggiore di $\frac{1}{2e}$ e se ne disegni il grafico.

QUESTIONARIO

1 Si narra che l'inventore del gioco degli scacchi chiedesse di essere compensato con chicchi di grano: un chicco sulla prima casella, due sulla seconda, quattro sulla terza e così via, sempre raddoppiando il numero dei chicchi, fino alla 64^a casella. Assumendo che 1000 chicchi pesino circa 38 g, calcola il peso in tonnellate della quantità di grano pretesa dall'inventore.

2 I poliedri regolari - noti anche come *solidi platonici* - sono, a meno di similitudini, solo cinque: il tetraedro, il cubo, l'ottaedro, il dodecaedro e l'icosaedro. Sai dimostrarlo?

3 Un foglio di carta deve contenere: un'area di stampa di $50\,\text{cm}^2$, margini superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Quali sono le dimensioni del foglio di carta di area minima che si può utilizzare?

4 La capacità di un serbatoio è pari a quella del cubo inscritto in una sfera di un metro di diametro. Quanti sono, approssimativamente, i litri di liquido che può contenere il serbatoio?

5 Si dimostri che la somma dei coefficienti dello sviluppo di $(a+b)^n$ è uguale a 2^n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

6 L'equazione risolvente un dato problema è: $k\cos 2x - 5k + 2 = 0$ dove k è un parametro reale e x ha le seguenti limitazioni: $15° < x < 45°$. Si discuta per quali valori di k le radici dell'equazione siano soluzioni del problema.

7 La funzione $f(x) = x^3 - 2x^2$ soddisfa le condizioni del teorema di *Lagrange* nell'intervallo [0; 1]? Se sì trova il punto ξ che compare nella formula: $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

8 La funzione $f(x) = \operatorname{tg} x$ assume valori di segno opposto negli estremi dell'intervallo $I = \left[\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3}{4}\pi\right]$, eppure non esiste alcun $x \in I$ tale che $f(x) = 0$. È così? Perché?

9 Della funzione $f(x)$ si sa che è derivabile e diversa da zero in ogni punto del suo dominio e, ancora, che: $f'(x) = f(x)$ e $f(0) = 1$. Puoi determinare $f(x)$?

10 La funzione $f(x) = a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x$ ha un estremo relativo per $x = \dfrac{4\pi}{3}$ ed è $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = 1$. Si trovino a e b e si dica qual è il periodo di $f(x)$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Nel piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le due parabole p' e p'' di equazioni rispettivamente:

$$y = x^2, \qquad x = y^2 - 2y.$$

a) Fornirne la rappresentazione grafica, dopo aver determinato, fra l'altro, i loro punti comuni.

b) Indicato con V' il vertice della parabola p', con V'' il vertice della parabola p'' e con P il punto in cui p'' interseca il semiasse positivo delle y, calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dall'arco $V'V''$ della parabola p', dall'arco $V''P$ della parabola p'' e dal segmento $V'P$.

c) Calcolare l'ampiezza dell'angolo secondo cui le due parabole si secano in O e con l'uso di una calcolatrice esprimerla in gradi sessagesimali, primi e secondi.

d) Nel segmento parabolico, delimitato dalla retta di equazione $y = 4$ e dalla parabola p', inscrivere il rettangolo avente due lati paralleli all'asse y e area massima.

e) Stabilire se il rettangolo trovato ha anche il massimo perimetro.

PROBLEMA 2

Nel piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{x + k}{x^2},$$

dove k è un parametro reale non nullo.

a) Dimostrare che non hanno punti in comune e ognuna di esse presenta uno e un solo flesso.

b) Tra le curve assegnate, indicare con γ quella che ha come tangente inflessionale la retta di equazione $x + 27y - 9 = 0$.

c) Disegnare l'andamento di γ, dopo averne trovato le caratteristiche salienti e, in particolare, l'equazione della retta t tangente alla curva γ nel punto A di ascissa 1 e le coordinate dell'ulteriore punto che t ha in comune con γ.

d) Determinare l'equazione della circonferenza c, tangente alla curva γ nel punto A e avente il centro sull'asse y.

e) Calcolare l'area della minore delle regioni in cui l'asse x divide il cerchio delimitato da c.

QUESTIONARIO

1 Si considerino il rettangolo $ABCD$ e la parabola avente l'asse di simmetria parallelo alla retta AD, il vertice nel punto medio del lato AB e passante per i punti C e D. In una rotazione di mezzo giro intorno all'asse della parabola il rettangolo genera un solido di volume V' e la regione piana delimitata dalla parabola e dalla retta CD genera un solido di volume V''. Determinare il rapporto V'/V''.

2 Il numero delle soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen} 2x \cos x = 2$ nell'intervallo reale $[0; 2\pi]$ è:

A 0. B 2. C 3. D 5.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

3 Il limite della funzione $f(x) = x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$, per $x \to 0$:

A non esiste. B è 0. C è un valore finito diverso da 0. D è $+\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

4 Trovare, con il procedimento preferito ma con esauriente spiegazione, la derivata, rispetto a x, della funzione $f(x) = \operatorname{tg}(x)$.

5 Calcolare l'ampiezza dell'angolo diedro formato da due facce di un tetraedro regolare, espressa in gradi sessagesimali e approssimata al «primo».

6 Determinare il dominio della funzione $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ e stabilire se la funzione è derivabile in tale dominio.

7 Considerata la funzione reale di variabile reale $f(x)$, affermare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ significa che per ogni numero reale M, esiste un numero reale N tale che, per ogni x, se $x > N$ allora $f(x) > M$.
È vero o è falso? Accompagnare la risposta con un'interpretazione grafica.

8 È assegnato un triangolo equilatero di lato lungo L. Si costruisce un secondo triangolo, avente per vertici i punti medi dei lati del primo e, così proseguendo, un n-esimo triangolo avente per vertici i punti medi dei lati del triangolo $(n-1)$-esimo. Calcolare il limite cui tende la somma delle aree degli n triangoli quando n tende a ∞.

9 Si consideri la seguente uguaglianza: $\ln(2x+1)^4 = 4\ln(2x+1)$. È vero o falso che vale per ogni x reale? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

10 Cinque ragazzi sono contrassegnati con i numeri da 1 a 5. Altrettante sedie, disposte attorno a un tavolo, sono contrassegnate con gli stessi numeri. La sedia «1», posta a capotavola, è riservata al ragazzo «1», che è il caposquadra, mentre gli altri ragazzi si dispongono sulle sedie rimanenti in maniera del tutto casuale. Calcolare in quanti modi i ragazzi si possono mettere seduti attorno al tavolo.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2006
Sessione straordinaria

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

È dato il triangolo ABC in cui:

$$\overline{AB} = \frac{25}{2},\ \overline{AC} = 5\sqrt{5},\ \operatorname{tg}\hat{A} = 2.$$

Determinare l'altezza del triangolo relativa al lato AB e tracciare la circonferenza k avente centro in C e tangente al lato AB.

Dopo aver riferito il piano della figura a un conveniente sistema di assi cartesiani ortogonali, in modo, però, che uno degli assi di riferimento sia parallelo alla retta AB:

a) scrivere l'equazione della circonferenza k;

b) trovare le coordinate dei vertici del triangolo e del punto D in cui la circonferenza k interseca il segmento BC;

c) determinare l'equazione della parabola p, avente l'asse perpendicolare alla retta AB, tangente in D alla circonferenza k e passante per A;

d) calcolare le aree delle due regioni in cui la parabola p divide il triangolo ABC;

e) trovare, infine, le coordinate dei punti comuni alla circonferenza k e alla parabola p.

PROBLEMA 2

Si considerino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono simmetrici rispetto all'origine O e hanno un massimo relativo nel punto $\left(-2; \frac{64}{15}\right)$.

a) Trovare l'equazione $y = f(x)$ dei grafici suddetti.

b) Dimostrare che tali grafici hanno tre punti in comune, in due dei quali hanno anche la stessa tangente.

c) Indicare con γ il grafico avente come tangente inflessionale l'asse x e disegnarne l'andamento.

d) Indicato con $P(x)$ il polinomio rappresentato da γ e chiamati u e v ($u < v$) le ascisse dei punti, distinti da O, in cui γ interseca l'asse x, calcolare:

$$\int_u^v P(x)\,dx.$$

e) Dopo aver controllato che γ ha tre flessi allineati, determinare le ascisse dei punti in cui la retta dei flessi interseca γ.

QUESTIONARIO

1 È assegnato un pentagono regolare di lato lungo L. Recidendo opportunamente, in esso, cinque triangoli congruenti, si ottiene un decagono regolare: calcolarne la lunghezza del lato. (Si lascino indicate le funzioni goniometriche degli angoli coinvolti).

2 Una piramide quadrangolare regolare è tale che la sua altezza è il doppio dello spigolo di base. Calcolare il rapporto fra il volume del cubo inscritto nella piramide e il volume della piramide stessa.

3 Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$, entrambe tendenti a 0, quando $x \to a$, non soddisfano alle condizioni previste dal teorema di De L'Hôpital, non è possibile calcolare il limite di $\frac{g(x)}{f(x)}$ quando $x \to a$. È vero o è falso? Fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

4 Il limite della funzione $f(x) = x - \ln x$, per $x \to +\infty$ è:

A 0. **B** un valore finito diverso da 0. **C** $+\infty$. **D** $-\infty$.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della scelta operata.

5 Dimostrare che la derivata, rispetto a x, della funzione $\operatorname{arctg}(x)$ è $\frac{1}{1+x^2}$.

6 Dopo aver enunciato il teorema di Rolle, spiegare in maniera esauriente se può essere applicato alla funzione $f(x) = \sqrt{x^2}$, nell'intervallo $[-1; 1]$.

7 Giustificare, con considerazioni analitiche o mediante un'interpretazione grafica, che la seguente equazione:

$$x^5 + x^3 + 1 = 0$$

ammette una e una sola soluzione reale. Trovare, quindi, l'intervallo $[z; z+1]$ al quale appartiene tale soluzione, essendo z un numero intero.

8 Considerata l'equazione: $x^5 - 2x^3 + 1 = 0$, spiegare, con il metodo preferito ma in maniera esauriente, perché non può ammettere più di una soluzione *razionale*.

9 Considerata l'equazione: $\cos\frac{x}{2}\,\mathrm{sen}(2x) = 12$, spiegare in maniera esauriente se ammette soluzioni reali o se non ne ammette.

10 Una classe è formata da 28 alunni, di cui 16 femmine e 12 maschi. Fra le femmine c'è una sola «Maria» e fra i maschi un solo «Antonio». Si deve formare una delegazione formata da due femmine e due maschi. Quante sono le possibili delegazioni comprendenti «Maria» e «Antonio»?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2007

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Si considerino i triangoli la cui base è $AB = 1$ e il cui vertice C varia in modo che l'angolo $C\hat{A}B$ si mantenga doppio dell'angolo $A\hat{B}C$.

1. Riferito il piano ad un conveniente sistema di coordinate, si determini l'equazione del luogo geometrico γ descritto da C.
2. Si rappresenti γ, tenendo conto, ovviamente, delle prescritte condizioni geometriche.
3. Si determini l'ampiezza dell'angolo $A\hat{B}C$ che rende massima la somma dei quadrati delle altezze relative ai lati AC e BC e, con l'aiuto di una calcolatrice, se ne dia un valore approssimato in gradi e primi (sessagesimali).
4. Si provi che se $A\hat{B}C = 36°$ allora è $AC = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

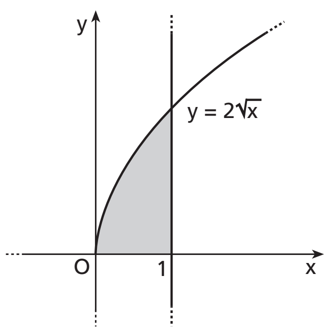
PROBLEMA 2

Si consideri un cerchio C di raggio r.

1. Tra i triangoli isosceli inscritti in C si trovi quello di area massima.
2. Si denoti con S_n l'area del poligono regolare di n lati inscritto in C. Si dimostri che $S_n = \dfrac{n}{2} r^2 \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{n}$ e si trovi un'analoga espressione per l'area del poligono regolare di n lati circoscritto a C.
3. Si calcoli il limite di S_n per $n \to \infty$.
4. Si spieghi in che cosa consista il problema della quadratura del cerchio e se, e in che senso, si tratti di un problema risolubile o meno.

QUESTIONARIO

1 La regione R delimitata dal grafico di $y = 2\sqrt{x}$, dall'asse x e dalla retta $x = 1$ (figura 1) è la base di un solido S le cui sezioni, ottenute tagliando S con piani perpendicolari all'asse x, sono tutte triangoli equilateri. Si calcoli il volume di S.



▲ **Figura 1.**

2 Le misure dei lati di un triangolo sono 40, 60 e 80 cm. Si calcolino, con l'aiuto di una calcolatrice, le ampiezze degli angoli del triangolo approssimandole in gradi e primi sessagesimali.

3 Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:

$$x^3 - x^2 - k + 1 = 0.$$

4 Un serbatoio di olio ha la stessa capacità del massimo cono circolare retto di apotema 1 metro. Si dica quanti litri di olio il serbatoio può contenere.

5 Si mostri che la funzione $y = x^3 + 8$ soddisfa le condizioni del *Teorema del valor medio* (o *Teorema di Lagrange*) sull'intervallo $[-2; 2]$. Si determinino i valori medi forniti dal teorema e se ne illustri il significato geometrico.

6 Si sa che il prezzo p di un abito ha subìto una maggiorazione del 6% e, altresì, una diminuzione del 6%; non si ha ricordo, però, se sia avvenuta prima l'una o l'altra delle operazioni. Che cosa si può dire del prezzo finale dell'abito?

7 Se $f(x)$ è una funzione reale dispari (ossia il suo grafico cartesiano è simmetrico rispetto all'origine), definita e integrabile nell'intervallo $[-2; 2]$, che dire del suo integrale esteso a tale intervallo?
Quanto vale nel medesimo intervallo l'integrale della funzione $3 + f(x)$?

8 Si risolva l'equazione:

$$4\binom{n}{4} = 15\binom{n-2}{3}.$$

9 Si calcoli l'integrale indefinito $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$ e, successivamente, si verifichi che il risultato di $\int_1^0 \sqrt{1-x^2}\,dx$ è in accordo con il suo significato geometrico.

10 Per orientarsi sulla Terra si fa riferimento a *meridiani* e *paralleli*, a *latitudini* e *longitudini*. Supponendo che la Terra sia una sfera S e che l'asse di rotazione terrestre sia una retta r passante per il centro di S, come si può procedere per definire in termini geometrici meridiani e paralleli e introdurre un sistema di coordinate geografiche terrestri?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2007
Sessione suppletiva

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1

Rispetto a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy) si consideri il punto $A(2; 0)$.

1. Si scriva l'equazione del luogo dei punti del piano che verificano la condizione:

   $$\overline{PO}^2 + 2\overline{PA}^2 = 8,$$

   controllando che si tratta di una circonferenza di cui si calcolino le coordinate del centro e il raggio.
2. Si determini l'ampiezza dell'angolo acuto formato dalla retta OB con la tangente alla circonferenza in B, essendo B il punto della curva avente la stessa ascissa di A e ordinata positiva.
3. Si scriva l'equazione della parabola cubica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ che presenta, nell'origine, un flesso con tangente orizzontale e passa per B; si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C.
4. Si calcoli l'area della regione finita di piano limitata dal segmento OB e dall'arco OB della suddetta parabola cubica.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$f(x) = e^{3x} + 2e^{2x} - 3e^x.$$

1. Si studi tale funzione e si tracci il suo grafico C, su un piano riferito a un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
2. Si determinino le coordinate del punto A, in cui la curva C incontra la curva C' rappresentativa dell'equazione $y = e^x$.
3. Si scrivano l'equazione della tangente alla curva C nell'origine e l'equazione della tangente alla curva C' nel punto A.
4. Si calcoli l'area della superficie piana, delimitata dalla curva C, dall'asse x e dalla retta di equazione $x = \ln 3$.

QUESTIONARIO

1 Si calcoli il limite della funzione $\dfrac{x^2 \cos x}{x^2 - \operatorname{sen}^2 x}$, quando x tende a 0.

2 Si determini il campo di esistenza della funzione $y = \operatorname{arcsen}(\operatorname{tg} x)$, con $0 \leq x \leq 2\pi$.

3 Si calcoli il valore medio della funzione $y = \operatorname{tg}^2 x$, nell'intervallo $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$.

4 Si provi che per la funzione $f(x) = x^3 - 8$ nell'intervallo $0 \leq x \leq 2$, sono verificate le condizioni di validità del teorema di Lagrange e si trovi il punto in cui si verifica la tesi del teorema stesso.

5 Fra tutti i triangoli isosceli inscritti in una circonferenza di raggio r, si determini quello per cui è massima la somma dell'altezza e del doppio della base.

6 Si consideri la seguente proposizione: «Il luogo dei punti dello spazio equidistanti da due punti distinti è una retta». Si dica se è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.

7 Sia data la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Si dica se essa è continua e derivabile nel punto di ascissa 0.

8 Si determini l'area della regione piana limitata dalla curva di equazione $y = e^x$, dalla curva di equazione $y = x^3$ e dalle rette $x = 0$ e $x = 1$.

9 Si determinino le equazioni degli asintoti della curva $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x + 2}$.

10 Si risolva la disequazione $\dbinom{x}{3} > \dfrac{15}{2}\dbinom{x}{2}$.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

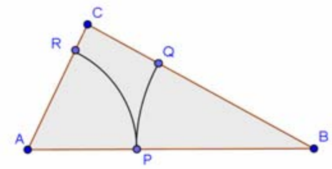
Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Il triangolo rettangolo ABC ha l'ipotenusa AB = a e l'angolo $C\hat{A}B = \frac{\pi}{3}$.

a) Si descriva, internamente al triangolo, con centro in B e raggio x, l'arco di circonferenza di estremi P e Q rispettivamente su AB e su BC. Sia poi R l'intersezione con il cateto CA dell'arco di circonferenza di centro A e raggio AP. Si specifichino le limitazioni da imporre ad x affinché la costruzione sia realizzabile.



b) Si esprima in funzione di x l'area S del quadrilatero mistilineo PQCR e si trovi quale sia il valore minimo e quale il valore massimo di S(x).

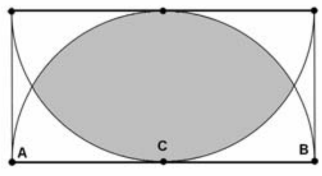
c) Tra i rettangoli con un lato su AB e i vertici del lato opposto su ciascuno dei due cateti si determini quello di area massima.

d) Il triangolo ABC è la base di un solido W. Si calcoli il volume di W sapendo che le sue sezioni, ottenute tagliandolo con piani perpendicolari ad AB, sono tutti quadrati.

PROBLEMA 2

Assegnato nel piano il semicerchio Γ di centro C e diametro AB = 2 , si affrontino le seguenti questioni:

a) Si disegni nello stesso semipiano di Γ un secondo semicerchio Γ_1 tangente ad AB in C e di uguale raggio 1. Si calcoli l'area dell'insieme piano intersezione dei due semicerchi Γ e Γ_1



b) Si trovi il rettangolo di area massima inscritto in Γ.

c) Sia P un punto della semicirconferenza di Γ, H la sua proiezione ortogonale su AB. Si ponga $P\hat{C}B = x$ e si esprimano in funzione di x le aree S_1 e S_2 dei triangoli APH e PCH.

Si calcoli il rapporto $f(x) = \frac{S_1(x)}{S_2(x)}$

d) Si studi *f(x)* e se ne disegni il grafico prescindendo dai limiti geometrici del problema.

M557 – ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO

Indirizzo: SCIENTIFICO

Tema di: MATEMATICA

QUESTIONARIO

1. Si consideri la seguente proposizione: " Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0$
5. Si determini un polinomio *P(x)* di terzo grado tale che:
$$P(0)=P'(0)=0,\ P(1)=0 \quad \text{e} \quad \int_0^1 P(x)dx=\frac{1}{12}$$
6. Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n>3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di n?
7. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3 - 3x^2 + k = 0.$$
8. Sia f la funzione definita da $f(x) = \pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di f e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$.
9. Sia $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x\mapsto 1} f(x)$? Si giustifichi la risposta.
10. Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%.
Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
Indirizzo: ________________

CORSO DI ORDINAMENTO
Sessione suppletiva 2008

Tema di MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 5 dei 10 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Dato un quadrante AOB di cerchio, di centro O e raggio 2, si consideri sull'arco AB un punto P.

1. Si esprima in funzione di $t = tg\frac{x}{2}$ $(con \quad x = B\hat{O}P)$ l'area del quadrilatero OMPN, essendo M ed N i punti medi dei raggi OA e OB.
2. Si studi la funzione f(t) così ottenuta e si tracci il suo grafico γ, indipendentemente dai limiti posti dal problema geometrico.
3. Si dica per quale valore di x l'area del quadrilatero assume valore massimo.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva γ e l'asse x.

PROBLEMA 2

Si consideri la funzione:

$$y = \text{sen}x(2\cos x + 1).$$

1. Tra le sue primitive si individui quella il cui diagramma γ passa per il punto $P(\pi,0)$.
2. Si rappresenti graficamente la curva γ nell'intervallo $0 \le x \le 2\pi$ e si dimostri che essa è simmetrica rispetto alla retta $x = \pi$.
3. Si scrivano le equazioni della retta tangenti alla curva nei suoi due punti A e B di ascisse $\pi/2$ e $3\pi/2$ e si determini il loro punto d'intersezione C.
4. Si calcoli l'area della parte finita di piano compresa tra la curva e le due suddette tangenti.

QUESTIONARIO

1. Si determini la distanza delle due rette parallele:
$$3x + y - 3\sqrt{10} = 0, \qquad 6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0 .$$
2. Un trapezio rettangolo è circoscritto ad una semicirconferenza di raggio r in modo che la base maggiore contenga il diametro. Si calcoli in gradi e primi (sessagesimali) l'ampiezza x dell'angolo acuto del trapezio, affinché il solido da esso generato in una rotazione completa attorno alla base maggiore abbia volume minimo.
3. Si determinino le equazioni degli asintoti della curva:
$$f(x) = -x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 2} .$$
4. Si calcoli il limite della funzione:
$$\frac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x},$$
quando x tende a 0.
5. Si calcoli il valore medio della funzione $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$ nell'intervallo 0 ≤ x ≤ 1.
6. Si sechi il solido di una sfera con un piano, in modo che il circolo massimo sia medio proporzionale fra le superficie appianate delle calotte nelle quali rimane divisa la sfera.
7. La regione finita di piano delimitata dalla curva di equazione $y = e^{x/2}(x+1)$ e dall'asse x nell'intervallo 0 ≤ x ≤ 1 è la base di un solido S le cui sezioni sono tutte esagoni regolari. Si calcoli il volume di S.
8. Si stabilisca per quali valori del parametro reale k esiste una piramide triangolare regolare tale che k sia il rapporto fra il suo apotema e lo spigolo di base.
9. Si scriva l'equazione della tangente al diagramma della funzione:
$$f(x) = (x^2 + 1)^{senx}$$
nel punto P di ascissa x = $\pi/2$.
10. Dato un sistema di riferimento cartesiano (ortogonale monometrico) in un piano, si dica che cosa rappresenta l'insieme dei punti P($1+t^2$, $1+t^2$), ottenuto al variare di t nei reali.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.