<u>ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO</u>
a.s. 2000/2001
- Tema di <u>MATEMATICA</u>
- Sessione suppletiva
CORSO DI ORDINAMENTO

Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.

PROBLEMA 1.

Si consideri la funzione reale f_m di variabile reale x tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x-2m|+m},$$

dove m è un parametro reale non nullo.

a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.

b) Indicata con C_1 la curva rappresentativa della funzione $f_1(x)$ corrispondente ad m=1, studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto A di ascissa 2.

c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva C_1 e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto A.

PROBLEMA 2.

Una piramide retta, di vertice V, ha per base il triangolo ABC, rettangolo in A, la cui area è 24 a^2, dove a è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$ e che il piano della faccia VAB della piramide forma col piano della base ABC un angolo φ tale che sen $\varphi = \frac{12}{13}$.

a) Calcolare l'altezza della piramide.

b) Controllato che essa è $\frac{24}{5}$ a, calcolare la distanza del vertice C dal piano della faccia VAB.

c) Condotto, parallelamente alla base ABC, un piano α che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di α dalla base ABC, calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.

d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale ?

QUESTIONARIO.

1. Considerata una funzione reale di variabile reale f(x), si prendano in esame le due seguenti proposizioni:
A: condizione necessaria e sufficiente affinché f(x) sia definita in un punto *a* è che sia continua in *a*.
B: condizione necessaria e sufficiente affinché f(x) sia continua in un punto *a* è che sia derivabile in *a*.
Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:
a) A vera – B vera; b) A vera – B falsa; c) A falsa – B vera; d) A falsa – B falsa.

2. Si consideri il cubo di spigoli AA', BB', CC', DD', in cui due facce opposte sono i quadrati ABCD e A'B'C'D'. Indicato con E il punto medio dello spigolo AB, sia CF la retta perpendicolare a DE condotta per C. I piani D'DE e C'CF dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3. Calcolare se esiste un numero naturale *n* per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1048576.$$

4. Sia f(x) una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che: f(0) = 1 ed f '(0) = 2. Calcolare:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x f(t)dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5. Dimostrare che la derivata, rispetto ad x, della funzione a^x, dove a è un numero reale positivo diverso da 1, è $a^x \ln a$.

6. Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7. Una primitiva della funzione f(x) è $x^2 + 2x$. Se è possibile calcolare $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right)dx$, determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base $[a,b]$ relativo alla funzione f(x), continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse x.

9. Calcolare la derivata della funzione sen 2x rispetto alla variabile x, ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

10. Considerata una funzione reale di variabile reale f(x), derivabile almeno due volte in un dato punto a, affinché la funzione f(x) abbia in a un punto di flesso la condizione $f''(a) = 0$ è:

a) necessaria e sufficiente;
b) necessaria ma non sufficiente;
c) sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.