

**ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO**

a.s. 2000/2001

- Tema di **MATEMATICA**

- Sessione suppletiva

CORSO DI ORDINAMENTO

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

**PROBLEMA 1.**

Si consideri la funzione reale  $f_m$  di variabile reale  $x$  tale che:

$$f_m = \frac{x^2}{|x - 2m| + m},$$

dove  $m$  è un parametro reale non nullo.

- a) Trovare gli insiemi di definizione, di continuità e di derivabilità della funzione.
- b) Indicata con  $C_1$  la curva rappresentativa della funzione  $f_1(x)$  corrispondente ad  $m=1$ , studiarla e disegnarla in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali, dopo aver determinato, in particolare, le equazioni dei suoi asintoti e il comportamento nel punto  $A$  di ascissa 2.
- c) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata dalla curva  $C_1$  e dalla retta parallela all'asse delle ascisse condotta per il punto  $A$ .

**PROBLEMA 2.**

Una piramide retta, di vertice  $V$ , ha per base il triangolo  $ABC$ , rettangolo in  $A$ , la cui area è  $24 a^2$ , dove  $a$  è una lunghezza assegnata. Si sa inoltre che  $\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{3}{5}$  e che il piano della faccia  $VAB$  della piramide forma

col piano della base  $ABC$  un angolo  $\varphi$  tale che  $\text{sen } \varphi = \frac{12}{13}$ .

- a) Calcolare l'altezza della piramide.
- b) Controllato che essa è  $\frac{24}{5} a$ , calcolare la distanza del vertice  $C$  dal piano della faccia  $VAB$ .
- c) Condotta, parallelamente alla base  $ABC$ , un piano  $\alpha$  che sechi la piramide e considerato il prisma retto avente una base coincidente con il triangolo sezione e per altezza la distanza di  $\alpha$  dalla base  $ABC$ , calcolare per quale valore di tale distanza il prisma ha volume massimo.
- d) Il prisma di volume massimo ha anche la massima area totale ?

**QUESTIONARIO.**

1. Considerata una funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , si prendano in esame le due seguenti proposizioni:  
A: condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia definita in un punto  $a$  è che sia continua in  $a$ .

B: condizione necessaria e sufficiente affinché  $f(x)$  sia continua in un punto  $a$  è che sia derivabile in  $a$ .

Una sola delle seguenti combinazioni è corretta: individuarla e fornire un'esauriente giustificazione della risposta:

- a) A vera – B vera; b) A vera – B falsa; c) A falsa – B vera; d) A falsa – B falsa.

2. Si consideri il cubo di spigoli  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$ ,  $DD'$ , in cui due facce opposte sono i quadrati  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ . Indicato con  $E$  il punto medio dello spigolo  $AB$ , sia  $CF$  la retta perpendicolare a  $DE$  condotta per  $C$ . I piani  $D'DE$  e  $C'CF$  dividono il cubo in quattro parti. Calcolare a quale frazione del cubo equivale ciascuna di esse.

3. Calcolare se esiste un numero naturale  $n$  per il quale risulti:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 1048576.$$

4. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile con derivata continua in tutto il campo reale, tale che:  $f(0) = 1$  ed  $f'(0) = 2$ . Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt - x}{\cos 2x - 1}.$$

5. Dimostrare che la derivata, rispetto ad  $x$ , della funzione  $a^x$ , dove  $a$  è un numero reale positivo diverso da 1, è  $a^x \ln a$ .

6. Fra i rettangoli di dato perimetro determinare quello di area massima.

7. Una primitiva della funzione  $f(x)$  è  $x^2 + 2x$ . Se è possibile calcolare  $\int_0^1 f\left(\frac{x}{2}\right) dx$ , determinare il valore dell'integrale. In caso contrario spiegare perché il calcolo non è possibile.

8. In un piano, riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sia T un trapezoide di base  $[a, b]$  relativo alla funzione  $f(x)$ , continua in tale intervallo. Dimostrare la formula che esprime il volume del solido generato dal trapezoide quando ruota di un giro completo attorno all'asse  $x$ .

9. Calcolare la derivata della funzione  $\sin 2x$  rispetto alla variabile  $x$ , ricorrendo alla definizione di derivata di una funzione.

10. Considerata una funzione reale di variabile reale  $f(x)$ , derivabile almeno due volte in un dato punto  $a$ , affinché la funzione  $f(x)$  abbia in  $a$  un punto di flesso la condizione  $f''(a) = 0$  è:

- a) necessaria e sufficiente;
- b) necessaria ma non sufficiente;
- c) sufficiente ma non necessaria.

Una sola alternativa è corretta: individuarla e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è ammesso lasciare l'aula degli esami prima che siano trascorse tre ore dalla dettatura del tema.