

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO****CORSO DI ORDINAMENTO****Tema di: MATEMATICA**

*Il candidato risolva uno dei due problemi e 5 dei 10 quesiti in cui si articola il questionario.*

**PROBLEMA 1.**

Si consideri la seguente relazione tra le variabili reali  $x, y$ :

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a},$$

dove  $a$  è un parametro reale positivo.

- Esprimere  $y$  in funzione di  $x$  e studiare la funzione così ottenuta, disegnandone il grafico in un piano riferito ad un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy).
- Determinare per quali valori di  $a$  la curva disegnata risulta tangente o secante alla retta  $t$  di equazione  $x+y=4$ .
- Scrivere l'equazione della circonferenza  $k$  che ha il centro nel punto di coordinate  $(1,1)$  e intercetta sulla retta  $t$  una corda di lunghezza  $2\sqrt{2}$ .
- Calcolare le aree delle due regioni finite di piano in cui il cerchio delimitato da  $k$  è diviso dalla retta  $t$ .
- Determinare per quale valore del parametro  $a$  il grafico, di cui al precedente punto a), risulta tangente alla circonferenza  $k$ .

**PROBLEMA 2.**

Considerato un qualunque triangolo  $ABC$ , siano  $D$  ed  $E$  due punti interni al lato  $BC$  tali che:

$$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EC}.$$

Siano poi  $M$  ed  $N$  i punti medi rispettivamente dei segmenti  $AD$  ed  $AE$ .

- Dimostrare che il quadrilatero  $DENM$  è la quarta parte del triangolo  $ABC$ .
- Amnesso che l'area del quadrilatero  $DENM$  sia  $\frac{45}{2}a^2$ , dove  $a$  è una lunghezza assegnata, e amnesso che l'angolo  $\hat{A}BC$  sia acuto e si abbia inoltre:  $\overline{AB} = 13a$ ,  $\overline{BC} = 15a$ , verificare che tale quadrilatero risulta essere un trapezio rettangolo.
- Dopo aver riferito il piano della figura, di cui al precedente punto b), ad un conveniente sistema di assi cartesiani, trovare l'equazione della parabola, avente l'asse perpendicolare alla retta  $BC$  e passante per i punti  $M, N, C$ .
- Calcolare, infine, le aree delle regioni in cui tale parabola divide il triangolo  $ADC$ .

**QUESTIONARIO.**

- Indicata con  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, si sa che  $f(x) \rightarrow l$  per  $x \rightarrow a$ , essendo  $l$  ed  $a$  numeri reali. Dire se ciò è sufficiente per concludere che  $f(a) = l$  e fornire un'esauriente spiegazione della risposta.
- Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, continua nel campo reale, tale che  $f(0)=2$ . Calcolare:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{2x e^x},$$

dove  $e$  è la base dei logaritmi naturali.

- Si consideri il cubo di spigoli  $AA', BB', CC', DD'$ , in cui due facce opposte sono i quadrati  $ABCD$  e  $A'B'C'D'$ . Sia  $E$  il punto medio dello spigolo  $AB$ . I piani  $ACC'A'$  e  $D'DE$  dividono il cubo in quattro parti. Dimostrare che la parte più estesa è il quintuplo di quella meno estesa.

**M557 - ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO****CORSO DI ORDINAMENTO****Tema di: MATEMATICA**

4. Un tronco di piramide ha basi di aree  $B$  e  $b$  ed altezza  $h$ . Dimostrare, col metodo preferito, che il suo volume  $V$  è espresso dalla seguente formula:

$$V = \frac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb}).$$

In ogni caso esplicitare ciò che si ammette ai fini della dimostrazione.

5. Sia  $f(x)$  una funzione reale di variabile reale, derivabile in un intervallo  $[a, b]$  e tale che, per ogni  $x$  di tale intervallo, risulti  $f'(x) = 0$ . Dimostrare che  $f(x)$  è costante in quell'intervallo.

6. Dimostrare che si ha:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

dove  $n, k$  sono numeri naturali qualsiasi, con  $n > k > 0$ .

7. Fra i triangoli inscritti in un semicerchio quello isoscele ha:

- area massima e perimetro massimo;
- area massima e perimetro minimo;
- area minima e perimetro massimo;
- area minima e perimetro minimo.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

8. Considerata la funzione:

$$f(x) = a x^3 + 2 a x^2 - 3 x,$$

dove  $a$  è un parametro reale non nullo, determinare i valori di  $a$  per cui essa ha un massimo e un minimo relativi e quelli per cui non ha punti estremanti.

9. Il limite della funzione  $\frac{\sin x - \cos x}{x}$ , quando  $x$  tende a  $+\infty$ ,

- è uguale a 0;
- è uguale ad 1;
- è un valore diverso dai due precedenti;
- non è determinato.

Una sola risposta è corretta: individuarla e darne un'esauriente spiegazione.

10. Si consideri la funzione  $\frac{x + \sin x}{x - \cos x}$ . Stabilire se si può calcolarne il limite per  $x \rightarrow +\infty$  e spiegare se il calcolo può essere effettuato ricorrendo al teorema di De L'Hôpital.

---

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.

Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.